CENGAGE Learning®

Cálculo vectorial

Mikhail Malakhaltsev
José Ricardo Arteaga Bejarano

Universidad de los Andes
Colombia

Cálculo vectorial

M. A. Malakhaltsev
J. R. Arteaga B.

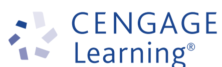
Bogotá, 2013

Cálculo vectorial

M. A. Malakhaltsev

J. R. Arteaga B.

Bogotá, 2013



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning™

Cálculo vectorial
Mikhail Malakhaltsev/
José Ricardo Arteaga Bejarano

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Sergio R. Cervantes González
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Ediciones OVA

Imagen de portada:
© vic927/Shutterstock

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.

Datos para catalogación bibliográfica:
Malakhaltsev, Mikhail/José Ricardo Arteaga Bejarano
Cálculo vectorial, 1a. *ed.*
ISBN: 978-607-519-028-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Este libro es publicado por Cengage Learning de Colombia, S.A., en coedición con la UNIVERSIDAD DE LOS ANDES en la Carrera 1 No. 19-27 Edificio Aulas 6 de Bogotá, D.C.

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 16 15 14 13

A mis padres y mis hijos
Mikhail

A Svetlana y David
José Ricardo

Contenido general

Prefacio

El libro es un texto guía para el curso Cálculo Vectorial para los estudiantes de las carreras de ingeniería. Está basado en las notas de clase del curso usadas durante muchos años en la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia).

Como prerrequisitos para estudiar los temas de este libro son necesarios un curso básico en álgebra lineal y los dos cursos introductorios al cálculo infinitesimal: Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

El objetivo principal del libro es acompañar al estudiante a entender de manera rápida y efectiva cuál es el corazón de cada tema del curso. Está escrito de manera corta; sin embargo, contiene los temas suficientes para aprender el curso, en particular incluye las definiciones y los teoremas fundamentales. Los ejemplos representan los patrones como los estudiantes deben responder a un ejercicio o situación problemática. Los ejercicios y problemas que son su corazón fueron escogidos de manera cuidadosa.

La estructura del libro está adaptada a un semestre académico de quince semanas. Cada capítulo tiene una lista de ejercicios recomendados que significa una colección mínima de ejercicios necesarios para entender el tema. Además el libro contiene una selección de tareas y exámenes que fueron usados en 2011.

Para la preparación de este libro elegimos los mejores ejemplos y ejercicios de varios libros, en particular de [1]-[5].

Acerca de los autores

Mikhail Malakhaltsev

Ph. D. (1987, Universidad de Kazan, Rusia). Profesor de Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia). Autor de más de treinta artículos en el área de geometría diferencial. Dictaba varios cursos de servicio y electivas en las universidades de Kazan y de los Andes. Es coautor de textos de guía de geometría y topología, y de un libro sobre tecnologías web para matemáticos.

José Ricardo Arteaga Bejarano

Ph. D. (1988, Universidad de Kazan, Rusia). Profesor asociado de Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia) desde 1990. Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes. Autor de varios artículos en el área de geometría diferencial. Adjunct Professor of Mathematical, Computational & Modeling Sciences Center (MCMSC), Arizona State University (USA). Codirector del Research Group in Mathematical and Computational Biology (BIOMAC) de la Universidad de los Andes.

CAPÍTULO 1

Curvas y superficies

1.1 Coordenadas en el plano $\mathbb{R}^2$

1.1.1 Coordenadas cartesianas (x, y)

El *plano bidimensional* $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de parejas ordenadas de números reales,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^2$ se llaman *puntos en* $\mathbb{R}^2$. Si $A = (x, y)$ es un punto en $\mathbb{R}^2$, los números x y y se llaman *coordenadas cartesianas* del punto A, y se escriben $A(x, y)$.

Las rectas $\overline{OX} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $\overline{OY} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ se llaman *ejes coordenados*.

Según estas coordenadas, dividiremos el plano en cuatro *cuadrantes del plano* $\mathbb{R}^2$, fig. 1.1

Notación	Nombre	x	y
I	Primer cuadrante	$x > 0$	$y > 0$
II	Segundo cuadrante	$x < 0$	$y > 0$
III	Tercer cuadrante	$x < 0$	$y < 0$
IV	Cuarto cuadrante	$x > 0$	$y < 0$

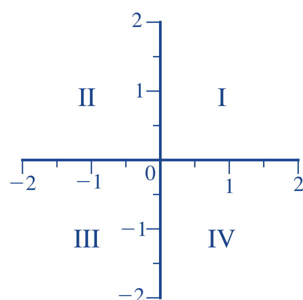


Figura 1.1. Ejes coordenados cartesianos y cuadrantes

Las *coordenadas del sistema cartesiano* (x, y) son rectas $x = a$ y $y = b$, donde a y b son constantes.

La *orientación positiva canónica del plano* $\mathbb{R}^2$ está dada por el convenio que la rotación más corta desde el semieje positivo x hasta el semieje positivo y es en sentido antihorario.

1.1.2 Coordenadas polares (r, θ)

En el plano $\mathbb{R}^2$ fijamos un punto O y un rayo OA. Para cada punto $M \in \mathbb{R}^2$ diferente del punto O tomemos una pareja ordenada de números reales (r, θ), donde $r = |OA|$, $r > 0$, y θ, $0 \le \theta < 2\pi$, es el ángulo entre los rayos OA y OM en sentido antihorario.

El número r se llama el *radio polar,* el ángulo θ *ángulo polar* y la pareja (r, θ) se llama *coordenadas polares* del punto M. El punto O se llama *polo* y el rayo OA el *eje polar,* fig. 1.2

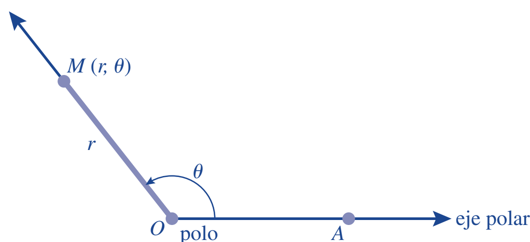


Figura 1.2. Coordenadas polares

Las *coordenadas del sistema de coordenadas polares* son las circunferencias $r = a$ y los rayos $\theta = b,$ donde $a > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ son constantes.

En el plano $\mathbb{R}^2$ hay una manera especial para elegir las coordenadas polares, escogiendo el polo $O = (0, 0)$ y el eje polar el semieje positivo $OX = \{(x, 0) | x \geq 0\}$. En este caso la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) del mismo punto está dada por las fórmulas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = x/r, \ \mathrm{sen}\theta = y/r, \ \ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.1. Hallar las coordenadas polares del punto $A(-1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Tenemos que $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, y el único ángulo θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ y $\cos\theta = \cos\theta = -1/\sqrt{2}$, $\mathrm{sen}\theta = 1/\sqrt{2}$, es $\theta = 3\pi/4$ (v. figura 1.3a).

Ejemplo 1.2. Hallar las coordenadas cartesianas del punto $A \in \mathbb{R}^2$ que tiene las coordenadas polares $(2, \pi/3)$.

Para este punto el radio polar es $r = 2$ y el ángulo polar es $\theta = \pi/3$, luego $x = 2\cos(\pi/3) = 1$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,(\pi/3) = \sqrt{3}$, y el punto es $A(1, \sqrt{3})$ (v. figura 1.3b).

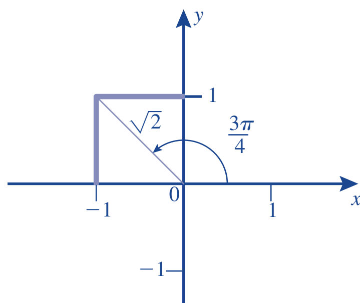


Fig. 1.3a

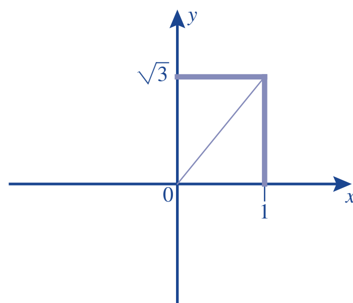


Fig. 1.3b

Figura 1.3. Ejemplos 1.1 y 1.2

Según estas coordenadas polares los cuadrantes del plano $\mathbb{R}^2$ son:

Notación	Nombre	r	θ
I	Primer cuadrante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
II	Segundo cuadrante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
III	Tercer cuadrante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
IV	Cuarto cuadrante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Nota 1.1. Algunas veces es conveniente tomar el radio polar igual a cero. El punto correspondiente a $r = 0$ es el polo O, y el ángulo polar de O es indeterminado. También algunas veces es conveniente admitir que el ángulo polar de un punto es un número arbitrario real, en este caso tomamos este ángulo con módulo 2π, por ejemplo, el ángulo polar de $A(1, 3\pi)$ es π.

Ejemplo 1.3. La espiral de Arquímedes se escribe con respecto a coordenadas polares como $r = t$, $\theta = t$, $t \geq 0$ (v. figura 1.4). El punto correspondiente a $t = 15\pi/4$ tiene las coordenadas polares $r = 15\pi/4$ y $\theta = 7\pi/4$.

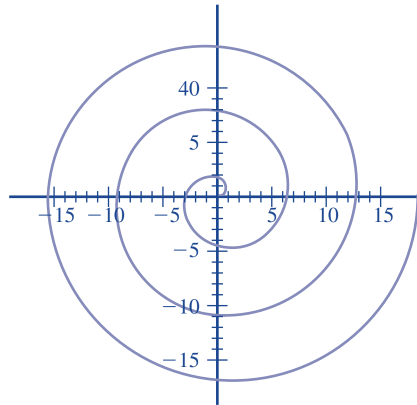


Figura 1.4. Espiral de Arquímedes para $0 \leq t \leq 6\pi$

1.2 Coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$

El espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de las ternas ordenadas de números reales,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}. \tag{1.3}$$

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^3$ se llaman *puntos en* $\mathbb{R}^3$. Si $A = (x, y, z)$ es un punto en $\mathbb{R}^3$, los números x, y y z se llaman *coordenadas cartesianas* del punto A, y se escriben como $A(x, y, z)$.

Octantes

En el espacio $\mathbb{R}^3$ se introducen los siguientes conjuntos, llamados *octantes*:

Notación	Nombre	x	y	z
I	Primer octante	$x > 0$	$y > 0$	$z > 0$
II	Segundo octante	$x < 0$	$y > 0$	$z > 0$
III	Tercer octante	$x < 0$	$y < 0$	$z > 0$
IV	Cuarto octante	$x > 0$	$y < 0$	$z > 0$
V	Quinto octante	$x > 0$	$y > 0$	$z < 0$
VI	Sexto octante	$x < 0$	$y > 0$	$z < 0$
VII	Séptimo octante	$x < 0$	$y < 0$	$z < 0$
VIII	Octavo octante	$x > 0$	$y < 0$	$z < 0$

Superficies elementales

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes diferentes de cero, entonces:

Ecuación	Descripción cartesiana
$x = 0$	Plano coordenado yz
$y = 0$	Plano coordenado xz
$z = 0$	Plano coordenado xy
$x = a$	Plano paralelo al plano yz
$y = b$	Plano paralelo al plano xz
$z = c$	Plano paralelo al plano xy

1.2.1 Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

En el espacio $\mathbb{R}^3$ fijamos un punto O y un rayo OZ . Sea Π el plano ortogonal al rayo OZ que pasa por el punto O y OA un rayo en el plano Π. Sean (r, θ) las coordenadas polares en el plano Π determinadas por el polo O y eje polar OA.

Para cada punto $M \in \mathbb{R}^3 \setminus OZ$, sea M' la proyección de M sobre el plano Π (v. figura 1.5). Entonces, las *coordenadas cilíndricas* del punto M son la terna ordenada (r, θ, z) donde (r, θ) son las coordenadas polares del punto M' en el plano Π y z es la longitud del segmento orientado MM'. Por la definición

$$r > 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

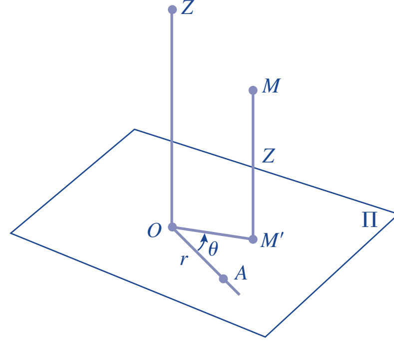


Figura 1.5. Coordenadas cilíndricas del punto $M \in \mathbb{R}^3$

En el espacio $\mathbb{R}^3$ hay una manera especial para elegir las coordenadas cilíndricas escogiendo O en el punto (0, 0, 0), el rayo OZ, en el semieje coordenado z, y el eje polar en el semieje coordenado x. En este caso las coordenadas cilíndricas, fig. 1.6, están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = x/r, \ \mathrm{sen}\,\theta = y/r, \ \ 0 \le \theta < 2\pi \\ z = z. \end{cases} \qquad (1.4)$$

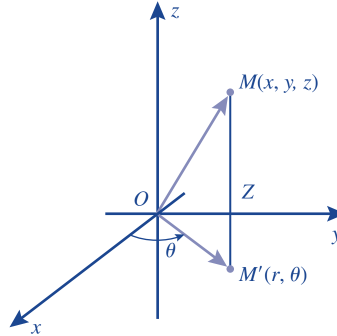


Figura 1.6. Relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas cilíndricas

Ejemplo 1.4. Hallar las coordenadas cilíndricas del punto $A(-1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$.

Tenemos que $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, y el único ángulo θ tal que $0 \le \theta < 2\pi$, $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ y $\mathrm{sen}\,\theta = -1/\sqrt{2}$ es $\theta = 5\pi/4$. Como $z = 3$, entonces, el punto A tiene las coordenadas cilíndricas $(\sqrt{2}, 5\pi/4, 3)$.



Ejemplo 1.5. Hallar las coordenadas cartesianas del punto $A \in \mathbb{R}^3$ que tiene las coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, -4)$.

Las coordenadas cartesianas del punto $A \in \mathbb{R}^3$ son $x = 2 \cos (2\pi/3) = -1$, $y = 2 \operatorname{sen} (2\pi/3) = \sqrt{3}$ y $z = -4$.



Ejemplo 1.6. Escribir la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ del cilindro con eje en el eje z y radio 1 en coordenadas cilíndricas.

Reemplazamos x, y, z en la ecuación por $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$, entonces obtenemos que $r^2 = 1$, y luego $r = 1$ porque $r > 0$. Entonces, la ecuación del cilindro con respecto a las coordenadas cilíndricas es $r = 1$.



Ejemplo 1.7. Expresar la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ de la esfera con el centro $(0, 0, 0)$ y radio 2 en coordenadas cilíndricas.

Reemplazamos x, y, z en la ecuación por $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$, entonces obtenemos que $r^2 + z^2 = 4$. Esta expresión es la ecuación de la esfera con respecto a las coordenadas cilíndricas.



Octantes

En términos de las coordenadas cilíndricas, los octantes son:

Notación	Nombre	r	θ	z
I	Primer octante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$z > 0$
II	Segundo octante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$z > 0$
III	Tercer octante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$z > 0$
IV	Cuarto octante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$z > 0$
V	Quinto octante	$r > 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$z < 0$
VI	Sexto octante	$r > 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$z < 0$
VII	Séptimo octante	$r > 0$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$z < 0$
VIII	Octavo octante	$r > 0$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$z < 0$

Superficies elementales

Si a, b, $c \in \mathbb{R}$ son constantes diferentes de cero, fig. 1.7, entonces:

Ecuación	Descripción cartesiana
$r = 0$	Origen de coordenadas
$\theta = 0$	Semiplano xz, con $x > 0$
$\theta = \pi$	Semiplano xz, con $x < 0$
$z = 0$	Plano coordenado xy
$r = a$	Cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
$\theta = b$	Semiplano perpendicular al plano xy y que lo intercepta en el rayo $\theta = b$
$z = c$	Plano paralelo al plano xy

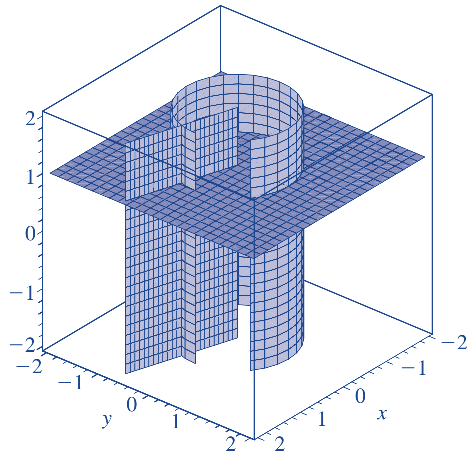


Figura 1.7. Coordenadas cilíndricas 3D (r, θ, z): r es constante (cilindro), θ es constante (semiplano vertical), z es constante (plano horizontal)

1.2.2 Coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ)

Sea O un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ y fijamos una recta orientada OZ que pasa por O y un semiplano α pasando por OZ. Además tomemos el plano π que pasa por O y ortogonal al rayo OZ (v. figura 1.8a). Para cada punto M que no pertenece a la recta OZ, sea M' la proyección de M sobre el plano Π. Entonces el punto M tiene por *coordenadas esféricas* la terna (ρ, ϕ, θ) donde $\rho = |OM|$, ϕ es el ángulo entre la dirección positiva OZ y el vector OM $(0 < \phi < \pi)$, y θ es el ángulo polar de M' en el plano Π, donde $0 < \theta < 2\pi$ (v. figura 1.8b).

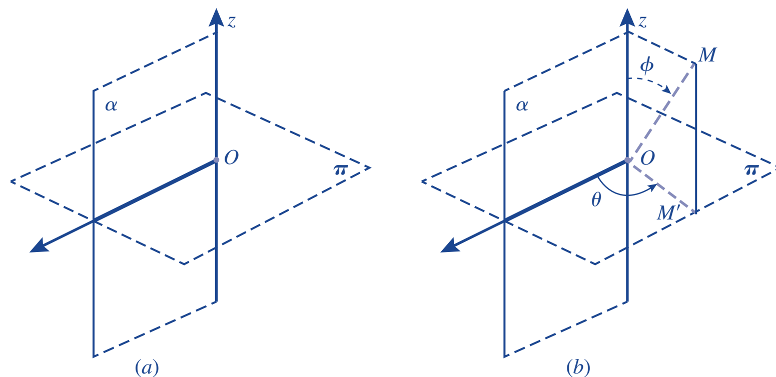


Figura 1.8. Coordenadas esféricas del punto M

En el espacio $\mathbb{R}^3$ hay una manera especial para elegir las coordenadas esféricas, se escoge O en el punto (0, 0, 0), el rayo OZ, en el semieje coordenado z, y el plano α en el plano xz (v. figura 1.9).

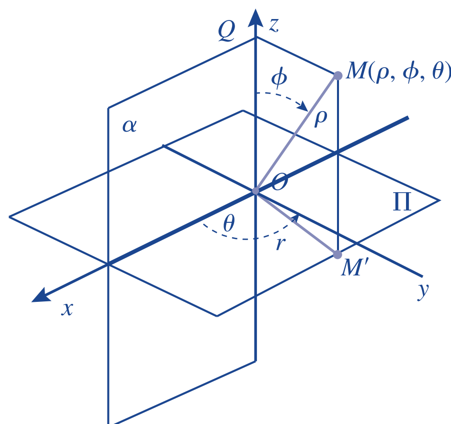


Figura 1.9. Coordenadas esféricas y cartesianas del punto M

El triángulo $\triangle OMM'$ es rectángulo en M'. La recta MM' es paralela al eje z, lo que hace que el ángulo $\phi = \angle OMM'$. Por lo tanto $r = \rho \operatorname{sen} \phi$. Reemplazando estas ecuaciones en (1.2.1) obtenemos que las coordenadas esféricas están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{sen} \phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho}, \cos \phi = \frac{z}{\rho}, \ 0 < \phi < \pi, \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\rho \operatorname{sen} \phi}, \cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} . \end{cases} \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.8. **(ejercicio resuelto).** Hallar las coordenadas cartesianas del punto A con coordenadas esféricas $(4, 2\pi/3, \pi/6)$.

Se tiene que, por las ecuciones 1.5, $x = 4$ sen $(2\pi/3)$ cos $(\pi/6) = 3$, $y = 4$ sen $(2\pi/3)$ sen $(\pi/6) = \sqrt{3}$, $z = 4$ cos $(2\pi/3) = -2$, por lo tanto las coordenadas cartesianas de A son $(3, \sqrt{3}, -2)$.



Ejemplo 1.9. **(ejercicio resuelto).** Hallar las coordenadas esféricas del punto A con coordenadas cartesianas $(-1/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{3})$.

Tenemos:

$$\rho = \sqrt{(-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

Luego sen $\phi = 1/2$, cos $\phi = \sqrt{3}/2$, entonces $\phi = \pi/6$. Finalmente, sen $\theta = \sqrt{3}/2$, cos $\theta = -1/2$, entonces $\theta = 2\pi/3$, así que las coordenadas esféricas de A son $(2, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$.



Ejemplo 1.10. Expresar la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ del cilindro cuyo eje coincide con el eje z y radio 1 en coordenadas esféricas.

Reemplazamos x, y, z en la ecuación por $x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ, $z = \rho$ cos ϕ, entonces obtenemos que ρ^2 sen^2 $\phi = 1$, es la ecuación del cilindro con respecto a las coordenadas esféricas.



Ejemplo 1.11. Expresar la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ de la esfera con el centro (0, 0, 0) y radio 3 en coordenadas esféricas.

Reemplazamos x, y, z en la ecuación con $x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ, $z = \rho$ cos ϕ, entonces obtenemos que $\rho^2 = 9$, y luego $\rho = 3$. Esta expresión es la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas.

Octantes

Notación	Nombre	ρ	ϕ	θ
I	Primer octante	$\rho > 0$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
II	Segundo octante	$\rho > 0$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
III	Tercer octante	$\rho > 0$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
IV	Cuarto octante	$\rho > 0$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

V	Quinto octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
VI	Sexto octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
VII	Séptimo octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
VIII	Octavo octante	$\rho > 0$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Superficies elementales

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes diferentes de cero, entonces:

Ecuación	Descripción cartesiana
$\theta = 0$	Semiplano xz, con $x > 0$
$\theta = \pi$	Semiplano xz, con $x < 0$
$\phi = \frac{\pi}{2}$	Plano coordenado xy
$\rho = a$	Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
$\theta = b$	Semiplano perpendicular al plano xy y que lo intercepta en el rayo $\theta = b$
$\phi = c \neq \frac{\pi}{2}$	Semicono recto de revolución $x^2 + y^2 - d^2 z^2 = 0$, con $d = \tan c$

Nota 1.2. Por la definición, adicionalmente supongamos que:

1) para el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, el radio $\rho = 0$ y los ángulos θ y ϕ son indefinidos;
2) los puntos del semieje z con $z > 0$ tienen el ángulo $\phi = 0$ y el ángulo θ es indefinido;
3) los puntos del semieje z con $z < 0$ tienen el ángulo $\phi = \pi$ y el ángulo θ es indefinido.

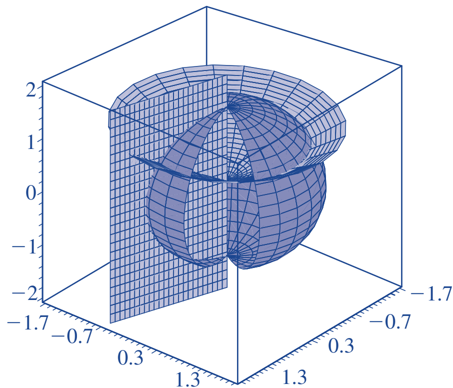


Figura 1.10. Coordenadas esféricas 3D (ρ, θ, ϕ): ρ es constante (esfera), θ es constante (semiplano vertical), ϕ es constante (semicono)

1.3 Rectas y planos en el espacio $\mathbb{R}^3$

Definición 1.1. Una *recta* ℓ en el espacio $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos dado por la llamada *ecuación vectorial de la recta:*

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a, b, c), \tag{1.6}$$

donde el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en la recta ℓ, y $\vec{v} = (a, b, c)$ es un *vector* en dirección de la recta llamado *director* de ℓ y $t \in \mathbb{R}$ (v. figura 1.11).

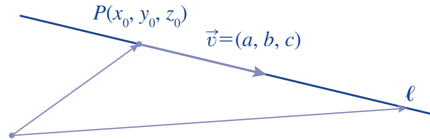


Figura 1.11. Una recta ℓ, el punto P está en ℓ, $\vec{v}$ es un vector director de ℓ

Las *ecuaciones paramétricas de la recta* ℓ son:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Nota 1.3. Para una recta el vector director no es único, sin embargo, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores directores de una recta ℓ, entonces $\vec{v} = \lambda\,\vec{w}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq 0$.

Ejemplo 1.12.

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ que pasa por los puntos $A(1, 2, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

El vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, -4, 4)$ es un vector director de la recta ℓ, y como punto inicial tomamos el punto A. Entonces, las ecuaciones paramétricas de ℓ son:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases} \tag{1.8}$$

Definición 1.2. Un *plano* α en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos dado por la llamada *ecuación vectorial del plano*:

$$\vec{r}\,(s, t) = (x_0, y_0, z_0) + s\,(a_1, b_1, c_1) + t\,(a_2, b_2, c_2), \tag{1.9}$$

donde el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en α, $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ son vectores que generan el plano α y $s, t \in \mathbb{R}$ (v. figura 1.12).

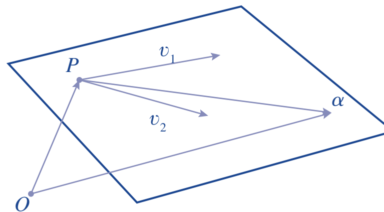


Figura 1.12. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ generan el plano α

Las *ecuaciones paramétricas del plano* α son:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t, \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t, \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t. \end{cases} \tag{1.10}$$

Si $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ es un vector normal al plano α y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en α, entonces para cada punto $M(x, y, z)$ de α los vectores $\overrightarrow{PM}$ y $\vec{N}$ son ortogonales. Por lo tanto,

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{N} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (N_1, N_2, N_3) = 0. \tag{1.11}$$

Entonces, tenemos la *ecuación del plano que pasa por el punto* $P(x_0, y_0, z_0)$ *y tiene el vector normal* $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$:

$$N_1(x - x_0) + N_2 (y - y_0) + N_3 (z - z_0) = 0. \tag{1.12}$$

Luego obtenemos la *ecuación lineal del plano* α,

$$N_1 x + N_2 y + N_3 z = d, \tag{1.13}$$

donde $d = N_1 x_0 + N_2 y_0 + N_3 z_0$ (v. figura 1.13).

Nota 1.4. Para obtener un vector normal se puede tomar el producto cruz $\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

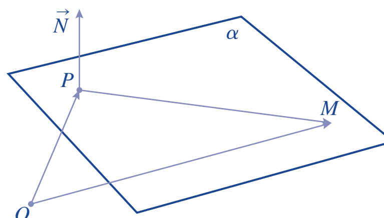


Figura 1.13. En el plano α, $\overrightarrow{PM} \in \alpha$ es ortogonal a $\vec{N}$

Ejemplo 1.13 **(ejercicio resuelto).** Graficar en el primer octante (v. sección 1.2) el plano cuya ecuación es, fig. 1.14

$$x + y + z = 1. \tag{1.14}$$

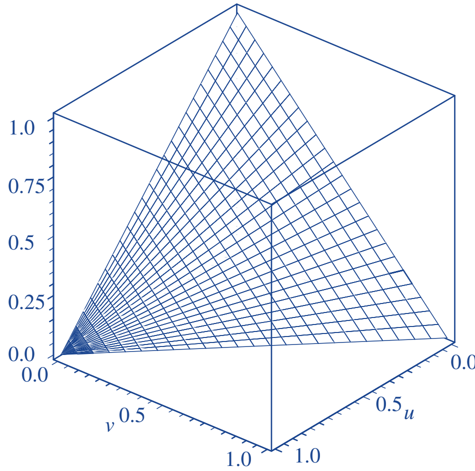


Figura 1.14. Plano $x + y + z = 1$

Encuentre tres puntos no colineales sobre él y muestre que efectivamente el vector $\vec{N} = (1, 1, 1)$ es un vector normal al plano dado.

♦

Dada una ecuación lineal en tres variables, tenemos dos grados de libertad, por lo tanto, encontrar tres puntos no colineales es dar valores, por ejemplo, a x y y, y encontrar z que satisfaga la ecuación. Luego verificar que los dos vectores formados con estos tres puntos no son uno múltiplo del otro. Por ejemplo $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(1, 0, 0)$. Ahora el producto vectorial es:

$$\overrightarrow{P_3P_1} \times \overrightarrow{P_3P_2} = (-1, -1, -1). \tag{1.15}$$

Efectivamente $\vec{N}$ y $\overrightarrow{P_3P_1} \times \overrightarrow{P_3P_2}$ son paralelos y por tanto $\vec{N}$ es un vector normal, al plano.

Ejemplo 1.14 **(ejercicio resuelto).** Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$, $B(6, 0, 1)$ y $C(0, 3, 1)$, encontrar la ecuación del plano α que los contiene.

Encontramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AB} = (7, -2, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$

y el vector normal

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (7, -2, 1) \times (1, 1, 1) = (-3, -6, 9) = -3(1, 2, -3).$$

Como punto inicial P, tomamos el punto A. Entonces la ecuación del plano es $x + 2y - 3z = 3$.

♦

1.4 Superficies de revolución

Definición 1.3. Una *superficie de revolución* en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una superficie generada al rotar una curva plana C alrededor de un eje que está en el plano de la curva.

Supongamos el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x, y, z). Un caso particular es cuando el eje de rotación es alguno de los ejes coordenados y la curva C está sobre alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 1.15. Supongamos que el eje de rotación es el eje z y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x), \tag{1.16}$$

tal que f es una función positiva definida sólo para $x \geq 0$. En el proceso de movimiento cada punto $(a, 0, f(a))$ de la curva C describe una circunferencia con centro $(0, 0, f(a))$ y radio a en el plano horizontal $z = f(a)$ (v. figura 1.15).

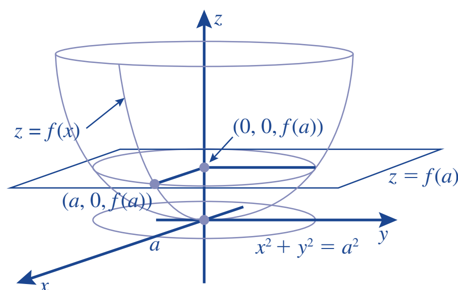


Figura 1.15. Superficie de revolución

Esta circunferencia satisface las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = f(a), \text{ donde } a \geq 0,$$

entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tiene ecuación:

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \tag{1.17}$$



Ejemplo 1.16. Si el eje de rotación es el eje x y la curva plana C está sobre el plano xz con ecuación:

$$z = f(x), \tag{1.18}$$

tal que f es una función positiva definida sólo para $x \geq 0$, entonces la ecuación de la superficie Σ de rotación tiene ecuación:

$$(f(x))^2 = y^2 + z^2. \tag{1.19}$$



Ejemplo 1.17. El *catenoide* es una superficie de revolución obtenida al rotar sobre el eje x la curva $z = \cosh x$, y la ecuación que la representa es: $y^2 + z^2 = \cosh^2 x$. Una parametrización del catenoide es: $x = u$, $y = \cosh u \cos v$, $z = \cosh u \operatorname{sen} v$, con valores de los parámetros $-2 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.



El catenoide, superficie de revolución obtenida al girar la curva catenaria $z = \cosh x$, sobre el plano xz, alrededor del eje x (fig 1.16)

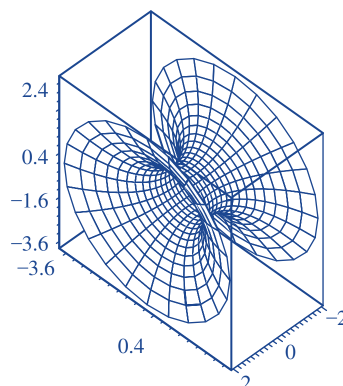


Figura 1.16. Catenoide

Ejemplo 1.18. Encontremos la ecuación de la superficie al rotar la recta $x = 3y$ alrededor del eje x. Un punto de la recta genera una circunferencia sobre un plano ortogonal al eje x con centro $(a, 0, 0)$ y radio $a/3$, entonces la ecuación de la circunferencia es $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2/9$, luego la ecuación de la superficie es $x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$ (v. figura 1.17).



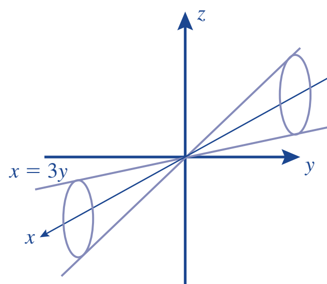


Figura 1.17. Cono

1.5 Superficies cilíndricas

Definición 1.4. Dada una recta ℓ, llamada generatriz, y una curva plana C en el espacio $\mathbb{R}^3$, una *superficie cilíndrica* es una superficie generada por una familia de rectas paralelas a ℓ y que tienen un punto en C.

Un caso particular es cuando la recta ℓ es alguno de los ejes coordenados cartesianos y la curva C está sobre alguno de los planos coordenados.

Ejemplo 1.19. Consideremos como recta generatriz cualquier recta paralela al eje z y que pasa por la curva $f(x, y) = k$, en el plano xy, donde k es una constante. El cilindro obtenido no necesariamente es una superficie de revolución, por ejemplo si la curva C es la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

La ecuación de la superficie cilíndrica en $\mathbb{R}^3$ en este caso es:

$$f(x, y) = k. \tag{1.20}$$

Un *cilindro elíptico recto* es una superficie cilíndrica generada por una familia de rectas paralelas a una recta (en este caso eje z) y que pasan por una curva plana C (en este caso la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$), ubicada sobre un plano xy. La ecuación que define esta superficie cilíndrica es: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Observemos que no aparece la variable z, precisamente es el eje paralelo a la recta generatriz, fig. 1.18.

♦

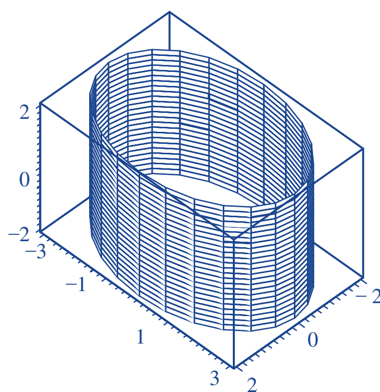


Figura 1.18. Cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Ejemplo 1.20. Consideremos la curva C sobre el plano xz, $z = \operatorname{sen} x$. La superficie cilíndrica generada por la familia de rectas paralelas al eje y tiene como ecuación que la representa:

$$z = \operatorname{sen} x. \tag{1.21}$$

Nota 1.5. Si la familia de rectas que genera una superficie cilíndrica son paralelas a uno de los ejes coordenados y la curva plana C está sobre el plano coordenado perpendicular a la familia de rectas, entonces la ecuación de la superficie cilíndrica no tiene la variable del eje. Esto no significa que en general las ecuaciones de las superficies cilíndricas no tengan una o dos variables. Un plano podría ser considerado como una superficie cilíndrica.

Un *cilindro sinusoidal* es una superficie cilíndrica generada por una familia de rectas paralelas a una recta (en este caso el eje y) y que pasan por una curva plana C (en este caso el gráfico de la función $z = \operatorname{sen} x$) ubicada sobre un plano xz. La ecuación que define esta superficie cilíndrica es la ecuación $z = \operatorname{sen} x$. Observemos que no aparece la variable x, precisamente es el eje paralelo a la recta generatriz.



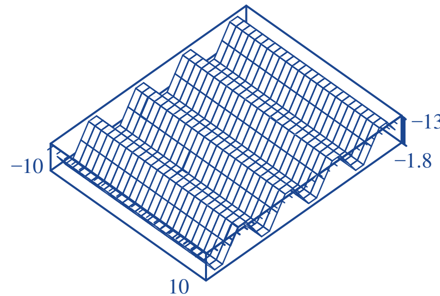


Figura 1.19. Cilindro sinusoidal $z = \operatorname{sen} x$

1.6 Superficies cuádricas

Definición 1.5. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x, y, z). Una *superficie cilíndrica* en este espacio es una superficie asociada a una ecuación de segundo grado en las variables x, y, z, es decir una superficie cuádrica tiene como ecuación que la representa una ecuación del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0. \tag{1.22}$$

Los ejemplos principales de las superficies cuádricas son los siguientes:

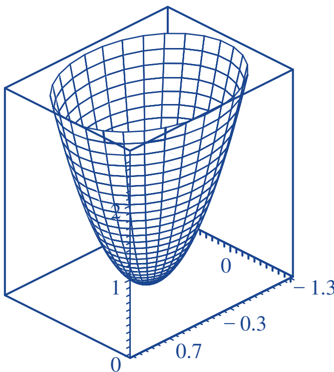


Figura 1.20. Paraboloide elíptico $a \neq b$, $c = 1$

Un *paraboloide elíptico,* fig. 1.20, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{1.23}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero. En el caso de que $a = b$, se llama un *paraboloide circular* y es además una superficie de revolución. La orientación del paraboloide elíptico depende del valor de c, si $c > 0$ está orientado hacia arriba, y si $c < 0$ hacia abajo.

Un *paraboloide hiperbólico*, fig. 1.21, o comúnmente llamado *silla de montar*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \tag{1.24}$$

donde *a, b, c* son números reales diferentes de cero.

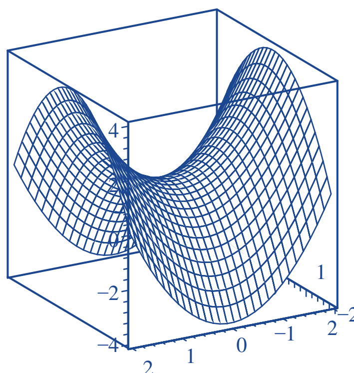


Figura 1.21. Paraboloide hiperbólico
$a = b$, $c = 1$

Un *hiperboloide elíptico de un solo manto,* fig. 1.21, o comúnmente llamado *hiperboloide de una hoja*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1.25}$$

donde *a, b, c* son números reales diferentes de cero.

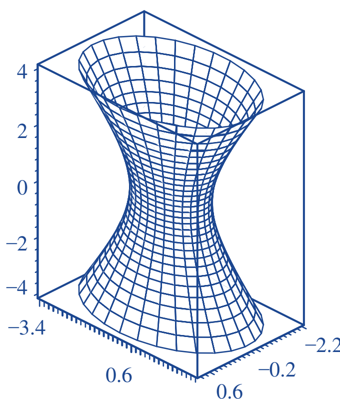


Figura 1.22. Hiperboloide elíptico de un manto

Un *hiperboloide elíptico de dos mantos*, fig. 1.23, o comúnmente llamada *hiperboloide de dos hojas*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{1.26}$$

donde *a, b, c* son números reales diferentes de cero.

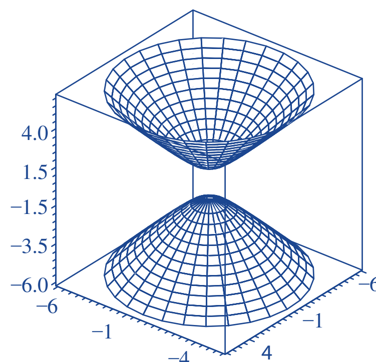


Figura 1.23. Hiperboloide elíptico de dos mantos

Un *elipsoide*, fig. 1.24, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1.27}$$

donde *a, b, c* son números reales diferentes de cero. En el caso de que $a = b$, es una superficie de revolución y si $a = b = c = R$, entonces tendremos una esfera de radio R.

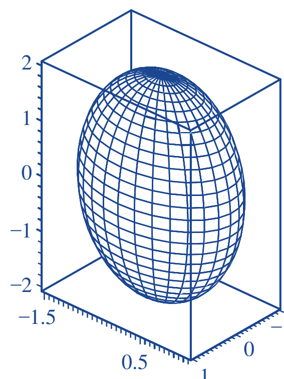


Figura 1.24. Elipsoide

Un *cono*, fig. 1.25, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1.28}$$

donde a, b, c son números reales diferentes de cero. En el caso de que $a = b$ es una superficie de revolución.

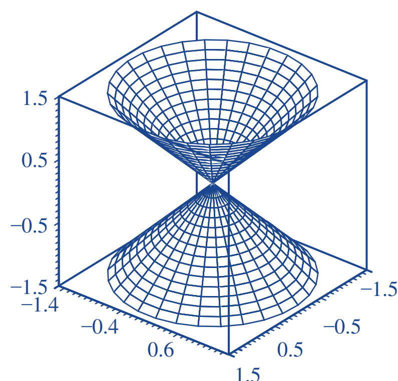


Figura 1.25. Cono

Las formas canónicas de las cuádricas son la simplificación al máximo de la ecuación (1.22) usando rotaciones y traslaciones apropiadas.

1.7 Ejercicios del capítulo 1

Ejercicios recomendados: 1-7, 10-14, 17-32, 34-40.

Ejercicio 1.1. Encuentre las coordenadas rectangulares del punto $(3, \pi/2, 5)$ dado en coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 1.2. Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto $(7, -7, 3)$ dado en coordenadas rectangulares.

Ejercicio 1.3. Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto $(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 4)$ dado en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 1.4. Exprese la ecuación $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 13$ en coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 1.5. Exprese la ecuación $8x^2 + 8y^2 - 4z^2 = 18$ en coordenadas esféricas.

Ejercicio 1.6. Exprese la ecuación $x^2 + y^2 = 18$ en coordenadas esféricas.

Ejercicio 1.7. Exprese la ecuación $z = 4x^2 - 4y^2$ en coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 1.8. El sistema coordenado que mejor describe una simetría rotacional con respecto al eje z, es:

A. El sistema cilíndrico;

B. El sistema esférico;

C. El sistema cartesiano.

Ejercicio 1.9. El sólido E está arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$. Describa este sólido en coordenadas esféricas.

Ejercicio 1.10. Encuentre el ángulo entre los planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$.

Ejercicio 1.11. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = -s, \\ z = 4 + s. \end{cases}$$

Decida si se intersectan o no. Si lo hacen, halle el punto P de intersección.

Ejercicio 1.12. Halle la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $-10x + 2y - 5z = -10$.

Ejercicio 1.13. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0, -3, -3)$,

$$B(-3, 0, -3) \text{ y } C(-3, -3, 0).$$

Ejercicio 1.14. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 0, -2)$,

$$B(1, 3, 1) \text{ y } C(0, 3, 0).$$

Ejercicio 1.15. Sea ℓ una recta que pasa por los puntos Q y $\mathbb{R}$. Sea P un punto que no pertenece a ℓ. Demuestre que la distancia desde el punto P a la recta ℓ se puede expresar según la siguiente la fórmula:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|},$$

donde

$$\vec{a} = \overrightarrow{QR}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{QP}.$$

Ejercicio 1.16. Halle la distancia del punto $P(-2, 5, 5)$ a la recta

$$x = -1 + t, \quad y = -4 - 3t, \quad z = 5t.$$

Ejercicio 1.17. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, 0, -3)$ y que contiene la recta

$$x = 10 - 7t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 10t.$$

Ejercicio 1.18. Sea $ax + by + cz = d$ un plano α y P un punto en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que la distancia de P al plano α se puede expresar según la siguiente fórmula:

$$d = \frac{|\vec{c} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|},$$

con $\vec{c} = \overrightarrow{QP}$, donde $Q \in \alpha$ es un punto cualquiera y $\vec{N}$ es un vector normal al plano α.

Ejercicio 1.19. Halle la distancia del punto $P(-4, -3, -7)$ al plano

$$8x - 7y - 2z = 9.$$

Ejercicio 1.20. Halle la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos,

$$x - z = 3,$$

$$y + 2z = 5,$$

y es perpendicular al plano

$$3x + 5y - 3z = 10.$$

Ejercicio 1.21. Halle la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano

$$9x + 9y - 3z = 9.$$

Ejercicio 1.22. Halle la distancia entre los planos paralelos,

$$6x + 3y - 2z = 7 \qquad \text{y} \qquad 12x + 6y - 4z = 48.$$

Ejercicio 1.23. Halle las coordenadas del punto P de intersección entre la recta

$$\begin{cases} x = 9 + 5t, \\ y = -3, \\ z = 4t, \end{cases}$$

y el plano

$$3x + 10y - 2z = 53.$$

Ejercicio 1.24. Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-10, 8, 4)$ y es paralela al vector, $\vec{v} = (2, 4, -7)$.

Ejercicio 1.25. Identifique el par de planos que son perpendiculares.

A. $x = 2x + 6y,\ -6x - 18y + 3z = 10;$

B. $-9x + 8y = 3,\ -6y + 8z = 10;$

C. $x + 9y - z = 6,\ -10x - y - 19z = 2.$

Ejercicio 1.26. Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P(9, 0, 6)$ y es perpendicular al plano

$$-3x + 3y - 4z = -4.$$

Ejercicio 1.27. Halle la ecuación del plano que tiene,

$$\begin{cases} x - \text{intercepto} = 2, \\ y - \text{intercepto} = 8, \\ z - \text{intercepto} = 2. \end{cases}$$

Ejercicio 1.28. Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(6, -2, 8)$ y $B(-10, -8, 6)$.

Ejercicio 1.29. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(8, 1, 10)$, es paralela al plano $x + y + z = -6$ y es perpendicular a la recta

$$x = -5 + t,\ y = 13 - t,\ z = 4t.$$

Ejercicio 1.30. ¿Cuál de las rectas es paralela a la recta dada?

$$x = -8 + t,\ y = t,\ z = -7 - 10t.$$

A. $r = (-5, -9, 10) + t\,(2, 2, -20)$;

B. $x = 10 + t,\ y = 10 + t,\ z = 1 - t$;

C. la recta de intersección de los planos $x + 3 = y - 8$ y $x + 3 = 1 - z$.

Ejercicio 1.31. Encuentre las trazas de la superficie

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1,$$

con los planos $x = k$, $y = k$, $z = k$.

Ejercicio 1.32. Identifique la superficie con ecuación

$$100y^2 + x^2 = 25 + 25z^2.$$

Ejercicio 1.33. Halle la ecuación de la superficie formada por todos los puntos P tales que la distancia desde P al eje x es cuatro veces la distancia de P al plano yz.

Ejercicio 1.34. La ecuación de un paraboloide hiperbólico es:

A. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{7} = \dfrac{z}{10}$;

B. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{10} = 1 - \dfrac{z^2}{4}$;

C. $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{10} = \dfrac{z^2}{4}$;

D. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = \dfrac{z}{5}$.

Ejercicio 1.35. La superficie cuya ecuación está dada por

$$y^2 + 100z^2 - x = 0$$

es un:

A. hiperboloide de un solo manto con eje el eje x;

B. paraboloide elíptico con eje el eje x y vértice en el origen;

C. hiperboloide de dos mantos con eje el eje y,

Ejercicio 1.36. La reducción de la ecuación

$$z^2 = 6x^2 + 5y^2 - 30$$

a su forma canónica es:

A. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{5} = 1$;

B. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{6} - \dfrac{z^2}{30} = 1$;

C. $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{(1/5)^2} + z^2 = 1$.

Ejercicio 1.37. La ecuación

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 8y + 8z = 0$$

es de:

A. un hiperboloide de un solo manto con centro en $(-2, 4, -1)$ y eje paralelo al eje z,

B. un cono con eje paralelo al eje z y vértice en $(0, 4, 4)$,

C. un paraboloide circular con vértice en $(0, 4, 1)$ y eje el eje z.

Ejercicio 1.38. Halle la ecuación para la superficie que se obtiene al rotar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje y.

Ejercicio 1.39. Encuentre la ecuación para la superficie que se obtiene al rotar la recta $z = 5y$ alrededor del eje z.

Ejercicio 1.40. Encuentre la ecuación para la superficie que consiste en todos los puntos P que equidistan del punto $(0, -5, 0)$ y el plano $y = 5$.

CAPÍTULO 2

Funciones vectoriales

2.1 Funciones vectoriales de una variable

2.1.1 Definición de función vectorial

Una *función vectorial de variable real* es una aplicación $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^n$, donde $D \subseteq \mathbb{R}$ y se llama el *dominio* de $\vec{r}$.

Denotaremos la función vectorial $\vec{r}(t)$ como $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, donde $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son funciones reales de variable real llamadas *componentes* o *coordenadas de la función*.

Geométricamente una función vectorial $\vec{r}(t)$ es una trayectoria de un punto móvil en $\mathbb{R}^n$. Para cada valor del parámetro t obtenemos el vector de posición $\vec{r}(t)$ asociado al valor de t.

Ejemplo 2.1. Sea $\vec{r}(t) = \left(t, t^2\right)$ una función vectorial. Su dominio es $\mathbb{R}$ y la función toma valores en el plano $\mathbb{R}^2$. Para $t = 2$ obtenemos el vector de posición $(2, 4)$. ♦

Teorema 2.1. El dominio D de una función vectorial $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ es $D = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n$, donde D_i es el dominio de la función $f_i(t)$.

Ejemplo 2.2. Sea $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}, t^2\right)$ una función vectorial. Entonces $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ y $D_1 = (-\infty, 1)$, $f_2(t) = t^2$ y $D_2 = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Por lo tanto, $D = D_1 \cap D_2 = (-\infty, 1)$. ♦

2.1.2. Operaciones entre funciones vectoriales

Las operaciones entre funciones vectoriales se definen, si las funciones toman valores en el mismo espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Sean $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, $\vec{\rho}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$, entonces definimos:

1) La suma de dos funciones vectoriales $\vec{r}$ y $\vec{\rho}$, $\vec{u} = \vec{r} + \vec{\rho}$ es una función vectorial $\vec{u}(t) = \vec{r}(t) + \vec{\rho}(t) = (f_1(t) + g_1(t), \cdots, f_n(t) + g_n(t))$.

2) La multiplicación de una función vectorial $\vec{r}$ por un escalar $c \in \mathbb{R}$ es una función vectorial $\vec{\rho} = c\vec{r}$ tal que $\vec{\rho}(t) = c\vec{r}(t) = (cf_1(t), \dots, cf_n(t))$.

3) La multiplicación de una función vectorial $\vec{r}$ por una función real $f(t)$ es una función vectorial $\vec{\rho} = f\vec{r}$ tal que $\vec{\rho}(t) = f(t)\vec{r}(t) = (f(t)f_1(t), \dots, f(t)f_n(t))$.

4) El producto escalar, o producto punto, de dos funciones vectoriales $\vec{r}$ y $\vec{\rho}$ es una función real $u = \vec{r} \cdot \vec{\rho}$ tal que $u(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{\rho}(t) = f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t)$.

5) El producto vectorial, o producto cruz, de dos funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ y $\vec{\rho}(t)$ se define de manera análoga. Entonces,

   a) Si las funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ y $\vec{\rho}(t)$ tienen valores en $\mathbb{R}^2$, es decir $\vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ y $\vec{\rho}(t) = (g_1(t), g_2(t))$, entonces el producto cruz $\vec{r}(t) \times \vec{\rho}(t)$ es una función escalar y

$$\vec{r}(t) \times \vec{\rho}(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix} = f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t). \tag{2.1}$$

   b) Si las funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ y $\vec{\rho}(t)$ tienen valores en $\mathbb{R}^3$, es decir $\vec{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ y $\vec{\rho}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$, entonces el producto cruz $\vec{r}(t) \times \vec{\rho}(t)$ es una función vectorial y

$$\vec{r}(t) \times \vec{\rho}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} =$$
$$(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t); f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t); f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)). \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.3. Sean $\vec{r}(t) = (1, t)$ y $\vec{\rho}(t) = (\cos t - 2, -2t)$ dos funciones vectoriales, entonces

$$\begin{aligned} 2\vec{r}(t) + \vec{\rho}(t) &= 2(1, t) + (\cos t - 2, -2t) \\ &= (2, 2t) + (\cos t - 2, -2t) \\ &= (2 + \cos t - 2, 2t - 2t) = (\cos t,\ 0); \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \times \vec{\rho}(t) &= (1, t) \times (\cos t - 2, -2t) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & t \\ \cos t - 2 & -2t \end{vmatrix} = 1(-2t) - t(\cos t - 2) \\ &= -2t - t\cos t + 2t = -t\cos t. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.3 Continuidad

Definición 2.2. Sea $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial tal que $\vec{r}(t) = (f_1\ (t), \ldots, f_n\ (t))$. Entonces

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \lim_{t \to a} (f_1(t), \ldots, f_n(t)) = \left(\lim_{t \to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to a} f_n(t) \right). \qquad (2.5)$$

Por lo tanto, el límite existe si y sólo si todos los límites $\lim_{t \to a} f_1(t)$, $i = 1, \ldots, n$, existen.

Ejemplo 2.4. Si $\vec{r}(t) = \left(\log(1+t), \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, \cos t - 2 \right)$, entonces

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to 0} \log(1+t), \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \lim_{t \to 0} \cos t - 2 \right) = (0, 1, -1). \qquad (2.6)$$

Definición 2.3. Una función vectorial es *continua* en un dominio D, si cada una de sus componentes es continua en D.

Ejemplo 2.5. Consideremos la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{1}{1-t}, \dfrac{1}{1+t} \right)$ que está definida en $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y es continua aquí, porque cada una de sus componentes $\dfrac{1}{1-t}$ y $\dfrac{1}{1+t}$ son continuas en D. ♦

Ejemplo 2.6. La función vectorial

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t, t^2), & t \geq 0, \\ (-1, t), & t < 0. \end{cases}$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ pero no es continua en $\mathbb{R}$ porque su primera componente

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

no es continua, sin embargo su segunda componente

$$f_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0, \\ t, & t < 0. \end{cases}$$

sí es continua (v. figura 2.1). ♦

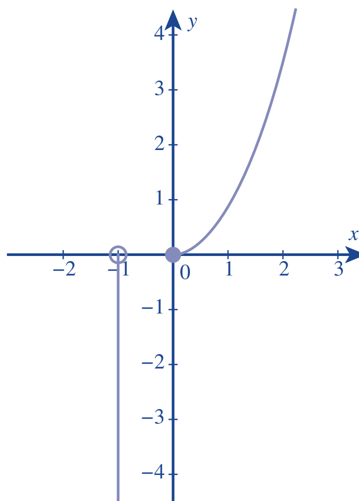


Figura 2.1. Ejemplo 2.6

2.1.4 Derivadas

Definición 2.4. Dada una función vectorial $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, su *derivada* es la función vectorial $\vec{r}\,'(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{r}(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))$.

Ejemplo 2.7. Sea $\vec{r}(t) = \left(\tan(t^2-1), e^{t^2}\right)$. La derivada de $\vec{r}$ en $t = 0$, $\vec{r}\,'(0)$ la calculamos hallando primero la derivada en general y luego reemplazando el valor de t en cero:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(2t\sec(t^2-1), 2te^{t^2}\right) \to \vec{r}\,'(0) = (0,0)\,. \tag{2.7}$$

Teorema 2.2. Sean $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, $\vec{\rho}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ funciones vectoriales derivables en D, c una constante, $c \in \mathbb{R}$, y $f(t)$ una función real, entonces:

1) $(\vec{r}(t) + \vec{\rho}(t))' = \vec{r}\,'(t) + \vec{\rho}\,'(t)$;

2) $(c\vec{\rho}(t))' = c\vec{\rho}\,'(t)$;

3) $(f(t)\vec{\rho}(t))' = f'(t)\vec{\rho}(t) + f(t)\vec{\rho}\,'(t)$;

4) $(\vec{r}(t)\cdot\vec{\rho}(t))' = \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{\rho}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{\rho}\,'(t)$;

5) $(\vec{r}(t)\times\vec{\rho}(t))' = \vec{r}\,'(t)\times\vec{\rho}(t) + \vec{r}(t)\times\vec{\rho}\,'(t)$;

6) $(\vec{r}(f(t)))' = f'(t)\vec{r}\,'(f(t))$.

Nota 2.1. a) Las fórmulas (2), (3), (4) y (5) del teorema anterior se conocen como *fórmulas de Leibniz*.

b) En la fórmula 5 las funciones vectoriales toman valores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

2.1.5 Recta tangente

Geométricamente la derivada de una función vectorial $\vec{r}(t)$ en $t = t_0$, el vector $\vec{r}\,'(t_0)$, es un vector tangente a la trayectoria determinada por $\vec{r}(t)$ en el punto $\vec{r}(t_0)$. Si el vector tangente $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, entonces la *ecuación vectorial de la recta tangente* es

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t_0) + s\vec{r}\,'(t_0). \tag{2.8}$$

Nota 2.2. En el caso de que $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$, la recta tangente no existe.

Ejemplo 2.8. La recta tangente a la trayectoria definida por $\vec{r}(t) = \left(t^3, t\right)$ en $t = -1$ tiene ecuación $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t_0) + s\vec{r}\,'(t_0) = (-1, -1) + s\,(3, 1) = (-1 + 3s, -1 + s)$. ♦

2.1.6 Integral

Definición 2.5. Dada una función vectorial $\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ la *integral definida* de $\vec{r}(t)$ es el vector $\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$.

Ejemplo 2.9. Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen} t \cos t, \dfrac{t}{t^2 - 4}\right)$ la integral definida es

$$\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t\,dt, \int_0^{\pi/2} \frac{t}{t^2-4}\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\,\Big|_0^{\pi/2}, \frac{1}{2}\ln(4 - t^2)\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{2}\left(1, \ln\left(\frac{16 - \pi^2}{16}\right)\right).$$

Hasta ahora hemos definido los límites, las derivadas y las integrales de funciones vectoriales de una variable real,

$$\vec{r}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \tag{2.9}$$

como los límites, derivadas e integrales de cada una de sus componentes en caso de que todas ellas existan. En este capítulo usaremos la primera y segunda derivada de una función vectorial de variable real (2.9) para definir nuevos conceptos. Dependiendo del tipo de problema la función vectorial $\vec{r}(t)$ se puede interpretar desde el punto de vista simplemente geométrico, como una trayectoria, o desde el punto de vista físico, como la posición de una partícula que se mueve por la acción de alguna fuerza. Igualmente su derivada $\vec{r}\,'(t)$ puede interpretarse como el vector tangente (punto de vista geométrico) o como la velocidad (punto de vista físico) de una partícula.

2.2 Curvas parametrizadas

Definición 2.6. Supongamos el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas (x, y, z). Una curva C *parametrizada* en este espacio es la representación gráfica de una función vectorial:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{2.10}$$

donde t se denomina el *parámetro de una curva*, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. La estructura de la curva dependerá de las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$. Diremos que C es de clase $C^r(I)$, si su parametrización $\vec{r}(t)$ lo es, es decir si las funciones componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son de clase $C^r(I)$, donde I es cualquier intervalo abierto.[1]

Ejemplo 2.10. Consideremos la curva con ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \quad -1 \leq t \leq 1. \\ z(t) = t^3 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dado que $y(t)$ no toma valores negativos, la gráfica no puede estar en los octantes III, IV ni de los que están "debajo" de éstos, VII y VIII. Cuando eliminamos el parámetro t y relacionamos dos coordenadas de los puntos, estamos obteniendo la proyección de la curva sobre el plano generado por esas dos variables. Por ejemplo, de las ecuaciones paramétricas dadas obtenemos que $y = x^2$, lo cual significa que la proyección de la curva dada sobre el plano xy es una parábola.

[1] Una función real de variable real se dice que es de clase C^r en algún intervalo abierto $I = (a, b)$, si sus primeras r derivadas son funciones continuas en I.

De la misma manera la proyección de la curva dada sobre el plano xz es una parábola cúbica $z = x^3$, y sobre el plano yz es la curva con ecuación $y^3 = z^2$.

La curva $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, $-1 \le t \le 1$ tiene como proyección sobre el plano xy la parábola $y = x^2$ y sobre el plano xz la parábola cúbica $z = x^3$, fig. 2.2.

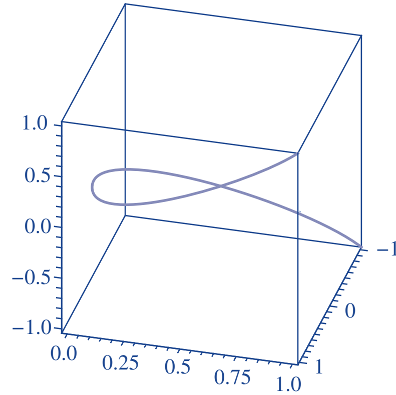


Figura 2.2. Una curva en $\mathbb{R}^3$

A continuación veremos algunas técnicas para graficar curvas que tienen ciertas características.

2.2.1 ¿Cómo podemos dibujar una curva?

Una técnica para graficar manualmente sobre el papel una curva C en el espacio se basa en el conocimiento previo de superficies. Al eliminar el parámetro entre dos coordenadas, obtenemos una ecuación en dos variables, por ejemplo $f(x, y) = 0$. Esta ecuación se puede interpretar de dos maneras diferentes. La primera como la curva sobre el plano coordenado xy que es la proyección ortogonal de la curva dada C. La otra manera es que la curva C está sobre una superficie cilíndrica Σ con ecuación $f(x, y) = 0$. Así podemos graficar la curva C conociendo una o varias superficies en las cuales está.

Nota 2.3. En muchos casos nos valemos de una superficie a la cual pertenece la curva dada C pero a veces es necesario tener información de dos superficies a las cuales pertenece. En general, no es cierto que podemos graficar la curva C habiendo encontrado dos superficies cilíndricas a las cuales pertenece, pues la intersección de las dos superficies encontradas puede ser que tenga más información que la que necesitamos, es decir describa curvas adicionales a la curva C. Lo que sí es cierto es que la curva es la intersección de las tres superficies cilíndricas perpendiculares a los planos coordenados cuando eliminamos el parámetro t por parejas de coordenadas, pero es más difícil de visualizar la situación.

Ejemplo 2.11. En el ejemplo 2.11 la curva $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, $-1 \leq t \leq 1$ está sobre las superficies cilíndricas Σ_1: $y = x^2$, Σ_2: $z = x^3$. En este caso es suficiente esta información, la curva es la intersección de este par de superficies cilíndricas. La primera superficie cilíndrica Σ_1 se dibuja, dibujando primero la curva $y = x^2$ sobre el plano xy, luego un deslizamiento de esta curva a lo largo del eje z en ambas direcciones. Similarmente la segunda superficie cilíndrica Σ_2 se dibuja, dibujando primero la curva $z = x^3$ sobre el plano xz, luego un deslizamiento de esta curva a lo largo del eje y sólo en la dirección positiva. ♦

Ejemplo 2.12. Consideremos la curva C con ecuaciones paramétricas,

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad -2\pi \leq t \leq 2\pi. \\ z(t) = t \end{cases} \tag{2.12}$$

La curva C está sobre el cilindro Σ_1: $x^2 + y^2 = 1$ y también sobre la superficie cilíndrica Σ_2: $x = \cos z$. Con sólo esta información no podemos graficar la curva, aunque sí lo podríamos hacer mirando la intersección de las tres superficies cilíndricas, lo cual puede resultar un poco complicado. Para este caso, podríamos simplemente pensar de la siguiente manera: a medida que t recorre el intervalo $I = [-2\pi, 2\pi]$, las coordenadas x y y del punto sobre la curva C recorren la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ sobre el plano xy en sentido positivo (visto desde arriba), mientras que z recorre el intervalo $I = [-2\pi, 2\pi]$ sobre el eje z. Por lo tanto, se forma una hélice circular, la cual está sobre el cilindro Σ_1 y hace parte de la intersección entre las dos superficies Σ_1 y Σ_2, pero la intersección contiene puntos que no están en C.

La curva $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, $z(t) = t$, $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ está sobre la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, fig. 2.3.

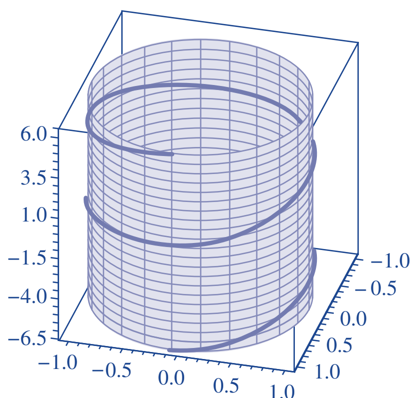


Figura 2.3. Una curva helicoidal en $\mathbb{R}^3$

2.2.2 Reparametrización

Definición 2.7. Dada una curva C con ecuación vectorial

$$\vec{r}_1(t) = (x(t), y(t), z(t)), \; t \in I_1 \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

y una función derivable $f(s)$, $f: I_2 \to I_1$, donde $I_2 \subseteq \mathbb{R}$, tal que $f'(s) \neq 0$. Notaremos que f es biyectiva, y por lo tanto invertible, y la función inversa es también derivable. Podemos reparametrizar la curva y dar una expresión en términos de s definiendo $\vec{r}_2(s)$ como sigue:

$$\vec{r}_2(s) = (\vec{r}_1 \circ f)(s) = \vec{r}_1\,(f(s)) = \vec{r}_1(t). \tag{2.14}$$

Nota 2.4. Debe ser claro que $s = f^{-1}(t)$.

Ejemplo 2.13. Sea C definida mediante la función vectorial

$$\vec{r}_1(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \exp t\,\vec{j} - \sqrt{1-t}\,\vec{k},\; t\; s \in I_1 = (-\infty, 1]. \tag{2.15}$$

Ahora consideremos la función

$$t = f(s) = 1 - s^3, \tag{2.16}$$

la cual es biyectiva en todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Pero para construir la reparametrización en términos de s debemos estar seguros de que la función $t = f(s)$ tiene la propiedad $f'(s) \neq 0$ y que la función compuesta esté bien definida. Notaremos que $f'(s) \neq 0$, para $s \neq 0$. Luego debemos encontrar el dominio correcto para s tal que el rango de la función f sea $I_1 = (-\infty,1]$. Este proceso se hace usando la expresión para la función inversa,

$$s = f^{-1}(t) = \sqrt[3]{1-t}. \tag{2.17}$$

Por lo tanto, el dominio de f lo debemos restringir a $I_2 = (0, \infty)$ para que su rango sea exactamente $I_1 = (-\infty,1)$. Los extremos del intervalo I_2 se encuentran evaluando los extremos del intervalo I_1 en (2.17). ♦

2.2.3 Longitud de arco

Sea una curva en $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, definida por una función vectorial $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Un *arco de curva* es una parte de la curva dada por la misma función con $t_0 \leq t \leq t_1$, donde $a \leq t_0 \leq t_1 \leq b$.

Definición 2.8. El número

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{r}\,'(t)\|dt \tag{2.18}$$

es llamado *longitud de arco.*

Ejemplo 2.14

(ejercicio resuelto). La función vectorial $\vec{r}\,'(t) = (t\cos t,\ t\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 < t < \infty$, determina la espiral de Arquímedes (v. figura 2.4). Encuentre la longitud de arco entre los puntos $A\,(0,0) = \vec{r}(0)$ y $B\,(2\pi, 0) = \vec{r}(2\pi)$.

Tenemos

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos\ t - t\,\mathrm{sen}\,t, \mathrm{sen}\ t + t\cos t), \tag{2.19}$$

entonces

$$\|\vec{r}\,'(t)\|^2 = (\cos\ t - t\,\mathrm{sen}\ t)^2 + (\mathrm{sen}\,t + t\cos\ t)^2 = 1 + t^2, \tag{2.20}$$

y luego

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+t^2}. \tag{2.21}$$

La longitud de arco es

$$\int_0^{2\pi} \|\vec{r}(t)\| dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\big|_0^{2\pi}\right) \\ &= \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

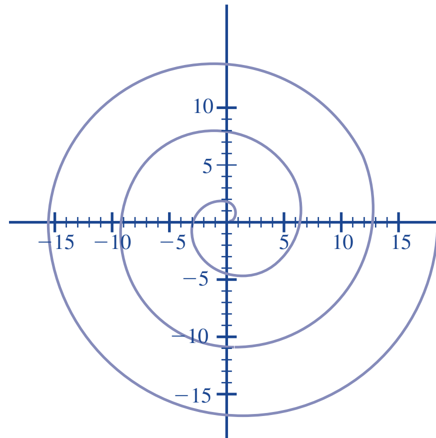


Figura 2.4. Espiral de Arquímedes

2.2.4 Parámetro natural *s*

De la definición 2.8 definimos la función,

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(u)\| du; \quad a \leq t \leq b \tag{2.23}$$

Esta función indica un cambio del parámetro t al parámetro s, el cual es llamado *parámetro longitud de arco* o *parámetro natural*.

Teorema 2.3. Supongamos que $\vec{r}(s)$ es una curva parametrizada en términos del parámetro natural s, entonces

$$\|\vec{r}\,'(s)\| = 1 \tag{2.24}$$

2.2.5 Curvatura

Las palabras *curvatura* y *curva* provienen de la misma raíz, es decir se habla de una curva si ésta tiene curvatura. La curvatura es un número que se puede calcular en cada punto P de una curva γ y la denotaremos con la letra griega $\kappa(P)$ (léase *kappa*). Por ejemplo en la figura 2.5, la curvatura en los puntos $P_1 \in \gamma$ y $P_2 \in \gamma$ es diferente, $\kappa(P_1) > \kappa(P_2)$. Si en un punto P observamos que la curva no tiene curvatura, escribiremos $\kappa(P) = 0$. Una recta tiene curvatura cero en todos sus puntos.

Definición 2.9. Sea s el parámetro longitud del arco de una curva $\vec{r}(s)$. Entonces la curvatura en el punto $\vec{r}(s_0)$ es

$$\kappa(s_0) = \|\vec{r}\,''(s_0)\|. \tag{2.25}$$

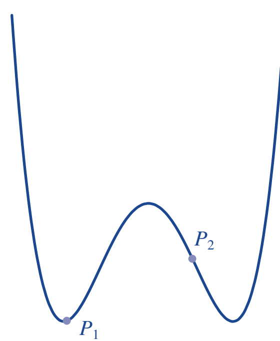


Figura 2.5. Curvatura en puntos diferentes

Ejemplo 2.15 **(ejercicio resuelto).** Encuentre la curvatura de la circunferencia de radio R. Una ecuación de una circunferencia centrada en el origen y radio R en términos del parámetro de longitud del arco es,

$$\vec{r}(s) = (R\cos(s/R), R\,\mathrm{sen}(s/R)). \tag{2.26}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\vec{r}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos(s/R), -\frac{1}{R}\,\mathrm{sen}(s/R)\right), \tag{2.27}$$

entonces

$$\kappa(s) = \frac{1}{R}. \tag{2.28}$$

Ejemplo 2.16 **(ejercicio resuelto).** Encuentre la curvatura de una recta.

Una ecuación de una recta en términos del parámetro de longitud del arco es,

$$\vec{r}(s) = (x_0 + \cos(\alpha)s, y_0 + \mathrm{sen}(\alpha)s). \tag{2.29}$$

Por lo tanto tenemos, $\vec{r}''(s) = \vec{0}$, entonces $\kappa(s) = 0$. ♦

Teorema 2.4. Sea $\vec{a}(t)$ una función vectorial con magnitud constante, $\|\vec{a}(t)\| = c$, entonces su derivada $\vec{a}'(t)$ es otra función vectorial tal que los vectores $\vec{a}(t)$ y $\vec{a}'(t)$ son ortogonales para cada valor de t.

Demostración.

$$\|\vec{a}(t)\| = c \Rightarrow \|\vec{a}(t)\|^2 = c^2 \Rightarrow \vec{a}(t)\cdot\vec{a}(t) = c^2, \tag{2.30}$$

derivando (regla de Leibniz) tenemos que $\vec{a}(t)\cdot\vec{a}'(t) = 0$ ■

Teorema 2.5. Sea $\vec{r}(t)$ una curva suave $(\vec{r}\ (t) \neq 0)$. La curvatura de $\vec{r}(t)$ se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}. \tag{2.31}$$

Sea $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s)$ el vector tangente unitario en el punto $\vec{r}(s)$. El vector normal unitario a la curva, $\vec{N}(s) = \dfrac{1}{\|\vec{T}'(s)\|}\vec{T}'(s)$. Las siguientes fórmulas se llaman las *fórmulas de Frenet* para una curva plana:

$$\begin{aligned} \vec{T}'(s) &= \kappa(s)\,\vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa(s)\,\vec{T}(s). \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3 Ejercicios del capítulo 2

Ejercicios recomendados: 1-11, 13-18, 23, 24, 26, 28.

Ejercicio 2.1. Halle el dominio de la función vectorial

1) $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{t+1}\right)$.

2) $\vec{r}(t) = \left(\ln(t^2 - 1), 2t, \frac{1}{t+2}\right)$.

3) $\vec{r}(t) = \left(\frac{\ln t}{t}, \frac{3}{t-1}, \sqrt{-t}\right)$.

4) $\vec{r}(t) = (t^9, \sqrt{t-4}, \sqrt{10-t})$.

Ejercicio 2.2. Dadas la funciones vectoriales $\vec{r}_1(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$, $\vec{r}_2(t) = \left(\sqrt[3]{t+1}, \cos t\right)$, encuentre la función resultante y su dominio de definición,

1) $\vec{r}_1(t) - 2\vec{r}_2(t)$;

2) $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)$;

3) $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$.

Ejercicio 2.3. Haga un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones.

1) $\vec{r}(t) = (t, t)$.

2) $\vec{r}(t) = (2t, t+1)$.

3) $\vec{r}(s) = (s^3, s)$.

4) $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

5) $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$.

Ejercicio 2.4. Haga un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones.

1) $\vec{r}(t) = (t, t, t)$.

2) $\vec{r}(t) = (2t, t+1, 2)$.

3) $\vec{r}(s) = (s^3, s, s^2)$.

4) $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

5) $\vec{r}(t) = (t, t^2, \operatorname{sen} t)$.

Ejercicio 2.5. Encuentre el dominio de continuidad. En los puntos donde la función no es continua justifique por qué no lo es. Haga un bosquejo de la gráfica.

1) $\vec{r}(t) = (t, \operatorname{sen} t)$.

2) $\vec{r}(t) = \begin{cases} (1, t), & t \geq 0, \\ (-1, t), & t < 0. \end{cases}$

3) $\vec{r}\,(t) = \begin{cases} (t, t), & t \geq 0, \\ (-t, t), & t < 0. \end{cases}$

Ejercicio 2.6. Calcule,

1) $\vec{r}\,''(t)$, donde $\vec{r}\,(t) = (t, t^2, \operatorname{sen} t)$;

2) $\vec{r}\,'(t)$, donde $\vec{r}\,(t) = \left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \ln\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$.

Ejercicio 2.7. Dadas la funciones vectoriales $\vec{r}_1(t) = \left(\dfrac{1}{t}, t\right), \vec{r}_2(t) = \left(\sqrt[3]{t+1}, \cos t\right)$,

1) compruebe la fórmulas (1), (4) y (5) del teorema 2.2,

2) calcule la derivada de: $\vec{r}_1(t) - 2\vec{r}_2(t)$;

3) calcule la derivada de: $\vec{r}_1(t) - t\vec{r}_2(t)$;

4) calcule la derivada de: $\vec{r}_1(t^2) + t^3\vec{r}_2(t)$.

Ejercicio 2.8. Calcule las integrales indicadas,

1) $\displaystyle\int \vec{r}\,(t)dt$, donde $\vec{r}\,(t) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}, \operatorname{sen} t\right)$.

2) $\displaystyle\int_0^3 \left(e^t\,\vec{i} - te^{t^2}\vec{j}\,\right) dt$.

Ejercicio 2.9. Entre los puntos A, B, C, encuentre un punto que no está en la curva dada por la ecuación $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, donde

1) $\vec{r}(t) = (2 + t, 4t, -t)$ y $A(4, 8, -2)$, $B(3, 4, -1)$, $C(4, 8, -3)$;

2) $\vec{r}(t) = (t^2, 1 - 8t, 1 + t^3)$ y $A(49, -55, 350)$, $B(36, -47, 217)$, $C(1, -7, 2$

Ejercicio 2.10. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta tangente, si existe, a la curva dada en el punto indicado. Haga un bosquejo de la gráfica.

1) $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ en $t = 3\pi/4$.

2) $\vec{r}(t) = (4t^2, t)$ en $P(4, -1)$.

3) $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$ en $t = 0$.

4) $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ en $t = \pi/4$.

5) $\vec{r}(t) = (\cos t, t, \operatorname{sen} t)$ en $t = 0$.

Ejercicio 2.11. Determine la ecuación del plano normal a la curva dada por la ecuación $\vec{r} = r(t)$ en el punto A, donde

1) $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ y $A(3, 9, 27)$;

2) $\vec{r}(t) = (-t, t + 1, \operatorname{sen} t)$ y $A(0, 1, 0)$.

Ejercicio 2.12. ¿En qué punto de la curva

$$x = t^3,\ y = 3t,\ z = t^4$$

es el plano normal paralelo al plano $6x + 6y - 8z = 5$?

Ejercicio 2.13. Encuentre la función vectorial que representa la curva de intersección entre:

1) el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el paraboloide hiperbólico $z = xy$,

2) el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 11 + y$,

3) el paraboloide $z = 9x^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $y = x^2$,

4) el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ y el cilindro parabólico $z = x^2$.

Ejercicio 2.14. Encuentre el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ para:

1) $\vec{r}(t) = (4t^2, 8t, 4 \ln t)$;

2) $\vec{r}(t) = \left(\frac{4}{3} t^3, 4t^2, 8t\right)$,

3) $\vec{r}(t) = (2 \operatorname{sen} t, 8t, 2 \cos t)$.

Ejercicio 2.15. Halle la longitud de los siguientes arcos y haga un bosquejo de las gráficas.

1) $\vec{r}(t) = (t, \ln \cos t), 0 \leq t \leq \pi/6$.

2) $\vec{r}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t),\ a(1 - \cos t), 4a\cos(t/2)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

3) $\vec{r}(t) = (a \cosh t,\ a \operatorname{senh} t, at),\ -1 \leq t \leq 1$.

4) $\vec{r}(t) = (7 \operatorname{sen} t, 10t, 7\cos t),\ -18 \leq t \leq 18$.

5) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \vec{i} + e^t \vec{j} + e^{-t} \vec{k},\ 0 \leq t \leq 7$.

Ejercicio 2.16. Reparametrice la curva con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $t = 0$ en la dirección en que incrementa t.

1) $\vec{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t \; \vec{i} + t\,\vec{j} + 3\cos t \; \vec{k}$.

2) $\vec{r}(t) = 2e^t \operatorname{sen} t \; \vec{i} + 2e^t \cos t \; \vec{j}$.

3) $\vec{r}(t) = (4 + 3t)\,\vec{i} + (10 + 6t)\,\vec{j} - 9t\,\vec{k}$.

Ejercicio 2.17. Haga un bosquejo de la gráfica de la curva dada por la ecuación $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y calcule su curvatura κ en los puntos A y B, donde

1) $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$;

2) $\vec{r}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t,\; a(1 - \cos t))$, $A(t = \pi/4)$ y $B(t = \pi/2)$;

3) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t})$, $A(t = 0)$ y $B(t = 1)$.

Ejercicio 2.18. Haga un bosquejo de la gráfica de la curva dada por la ecuación $\vec{r} = \vec{r}(t)$, calcule su curvatura $\kappa(t)$ y dibuje la gráfica de la $\kappa(t)$,

1) $\vec{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t \; \vec{i} + 3\cos t \; \vec{j}$.

2) $\vec{r}(t) = (a\cosh t,\; a \operatorname{senh} t)$.

3) $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}$.

Ejercicio 2.19. ¿Para qué valor de x tiene la curva $y = 3e^x$ curvatura máxima?

Ejercicio 2.20. Demuestre la fórmula del teorema 2.5.

Ejercicio 2.21. Demuestre el teorema 2.3. (**Ayuda:** Use regla de la cadena.)

Ejercicio 2.22. Demuestre las fórmulas de Frenet.

Ejercicio 2.23. Calcule la rapidez de la partícula con la función de posición dada por:

1) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + 4t^2\,\vec{j} + 6t^7\,\vec{k}$;

2) $\vec{r}(t) = (t, 3t^2, 5t^4)$;

3) $\vec{r}(t) = 3\sqrt{2}\,t\,\vec{i} + e^{3t}\,\vec{j} + e^{-3t}\,\vec{k}$.

Ejercicio 2.24. La función de posición de una partícula está determinada por:

$$\vec{r}(t) = \left(2t^2, 3t, 2t^2 - 16t\right).$$

¿Cuándo obtiene la menor rapidez?

Ejercicio 2.25. Calcule la velocidad de la partícula con la función de posición dada por:

$$\vec{r}(t) = 2\mathrm{e}^{11t}\,\vec{i} + 20e^{-11t}\,\vec{j}.$$

Ejercicio 2.26. Calcule la aceleración de una partícula con la función de posición dada por,

1) $\vec{r}(t) = \left(6t^2, -2, 9t\right)$;

2) $\vec{r}(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\vec{i} + 10\,t\,\vec{j} - 5\cos t\,\vec{k}$

Ejercicio 2.27. Determine la velocidad $\vec{v}(t)$ de una partícula que tiene la aceleración y la velocidad inicial dada: $\vec{a}(t) = 8\,\vec{k}$, $\vec{v}(0) = 10\,\vec{i} + 6\vec{j}$.

Ejercicio 2.28. Determine el vector de posición de una partícula que tiene la aceleración dada y la velocidad y posición iniciales dadas.

1) $\vec{a}(t) = -10\,\vec{k}$, $\vec{v}(0) = \vec{i} + \vec{j} - 7\,\vec{k}$, $\vec{r}(0) = 8\,\vec{i} + 4\vec{j}$;

2) $\vec{a}(t) = 14\,\vec{i} + 18\vec{j} + 24\,t\,\vec{k}$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$, $\vec{r}(0) = 20\,\vec{i} + 6\vec{j}$.

Ejercicio 2.29. Calcule la componente tangencial del vector aceleración con la función de posición dada por:

$$\vec{r}(t) = (12t - 4t^3 + 5)\vec{i} + 12\,t^2\,\vec{j}.$$

Ejercicio 2.30. Calcule la componente normal del vector aceleración con la función de posición dada por:

$$\vec{r}(t) = 8\cos t\,\vec{i} + 8\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + 8\,t\,\vec{k}.$$

Ejercicio 2.31. ¿Qué fuerza se requiere para que una partícula de masa m tenga la siguiente función de posición?

$$\vec{r}(t) = 5t^3\,\vec{i} + 7\,t^2\,\vec{j} + 4\,t^3\,\vec{k}.$$

Ejercicio 2.32. Se arroja una pelota con un ángulo de 75° con respecto al suelo. Si la pelota aterriza a 98 m de distancia del lugar de lanzamiento. ¿Cuál fue la rapidez inicial de la pelota? Suponga que $g = 9.8\ \text{m}/\text{s}^2$.

Ejercicio 2.33. Una fuerza de magnitud de 80 N, actúa en forma directa hacia arriba del plano xy sobre un objeto con una masa de 5 kg. El objeto parte del origen con una velocidad inicial $\vec{v}(0) = 2\vec{i} - 7\vec{j}$. Determine la función de posición.

Ejercicio 2.34. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 936 m/s y un ángulo de elevación de 24°. Encuentre el alcance del proyectil.

CAPÍTULO

3 Funciones escalares

3.1 Campos escalares en varias variables

Definición 3.1. Una *función en n variables* es una aplicación f: $D \to \mathbb{R}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es el *dominio* de f. La *gráfica de f* es el conjunto

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D\}. \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.1. La función $f(x, y) = 2x + 3y - 1$ es una aplicación de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, entonces f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El dominio de f es $\mathbb{R}^2$. La gráfica de f es un plano (v. figura 3.1).

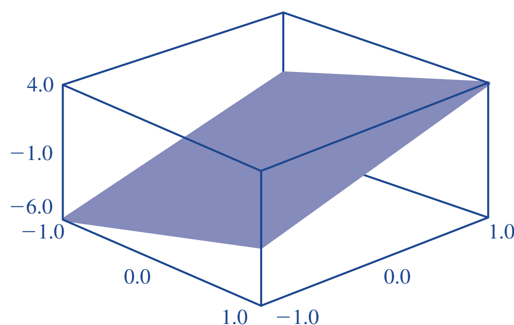


Figura 3.1. Gráfica del plano, $f(x, y) = 2x + 3y - 1$

Ejemplo 3.2. La función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es una aplicación f: $D \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (círculo unitario centrado en el origen). La gráfica de f es el hemisferio superior (v. figura 3.2).

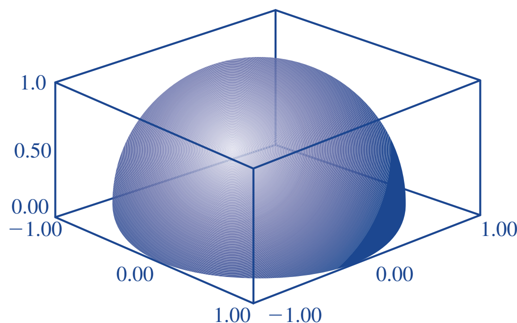


Figura 3.2. Gráfica de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (hemisferio superior)

Definición 3.2. Las *superficies de nivel* de una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables son las superficies en el dominio de f, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, dadas por la ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, donde c es una constante que pertenece a la imagen de $f(x_1, \ldots, x_n)$.

En el caso $n = 2$ si tenemos una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ las *curvas de nivel* son aquellas curvas definidas en D tales que $f(x, y) = c$, donde c *es* una constante.

Ejemplo 3.3. Consideremos la función $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. El dominio es todo el plano $\mathbb{R}^2$ y el rango es $(-\infty, 100]$. Las curvas de nivel son las circunferencias en el plano

$$x^2 + y^2 = 100 - c, \tag{3.2}$$

donde $c \in (-\infty, 100)$. Las figuras 3.3 y 3.4 muestran algunas de estas curvas de nivel

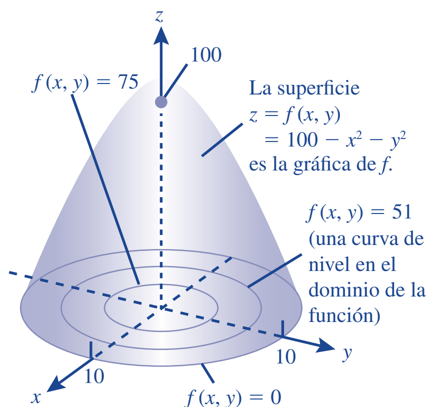


Figura 3.3. Curvas de nivel de $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$; $c = 0, 10, 75$

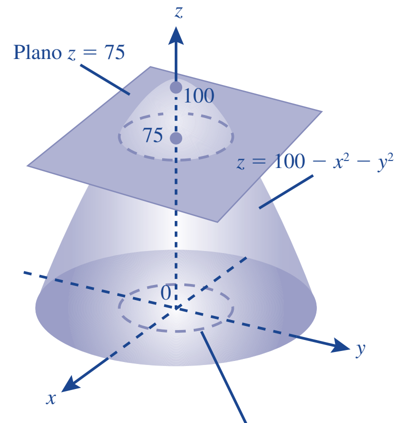


Figura 3.4. Curva de nivel para $c = 75$

Ejemplo 3.4. Las curvas de nivel de la funcion $f(x, y) = x + y$ son las rectas $x + y = c$, donde $c \in \mathbb{R}$. ♦

Ejemplo 3.5. Las curvas de nivel de la funcion $f(x, y) = x^2 - y^2$ son las hipérbolas $x^2 - y^2 = c$ cuando $c > 0$ y las hipérbolas $y^2 - x^2 = -c$ cuando $c < 0$ (fig. 3.5).

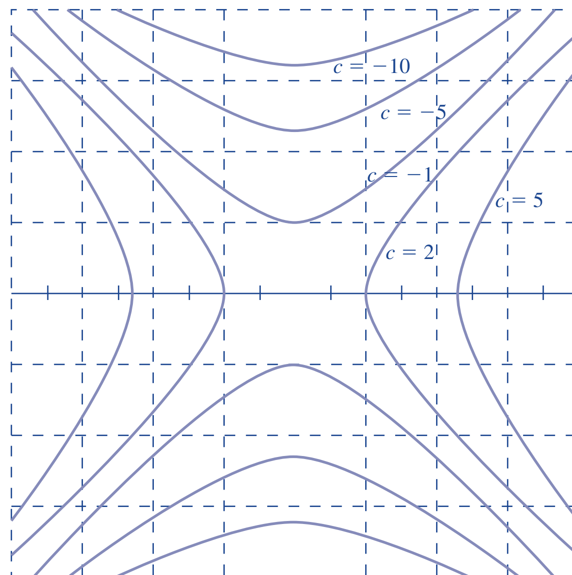


Figura 3.5. Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Ejemplo 3.6. Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ son las circunferencias $x^2 + y^2 = c$, donde $0 \leq c \leq 1$.

Ejemplo 3.7. Las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x + y - z$ son los planos $x + y - z = c$ donde $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.8. Las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ son los paraboloides $z = x^2 + y^2 - c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

3.2 Derivadas parciales

Definición 3.3. Un conjunto D de $\mathbb{R}^n$ se llama un *conjunto abierto* si para todo punto $\vec{x}_0 \in D$ existe una bola abierta

$$B_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\, \vec{x} \in D \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon \},\quad \text{donde } \varepsilon > 0 \tag{3.3}$$

tal que ésta está totalmente contenida en D, $B_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset D$.

Definición 3.4 (Derivadas parciales). Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f((x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}$ una función escalar en las variables $x_1, \ldots, x_n$ definida en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$.

La *derivada parcial* de f respecto a x_i en el punto $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, la cual denotaremos por $f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ o por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$, se define como el límite,

$$f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h} \tag{3.4}$$

en el caso de que este límite exista.

Ejemplo 3.9. Consideremos la función,

$$u = \cos(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \tag{3.5}$$

para calcular por ejemplo la derivada $u_{x_1}(\vec{a})$ consideramos las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ como constantes. Entonces,

$$\begin{aligned} u_{x_1}(\vec{a}) &= -2x_1 \operatorname{sen}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\,\big|_{\vec{a}} \\ &= -2a_1 \operatorname{sen}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\,. \end{aligned}$$

De la misma forma para calcular $u_{x_i}(\vec{a})$ se consideran las demás variables diferentes a x_i como constantes,

$$u_{x_i}(\vec{a}) = -2x_i \operatorname{sen}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\big|_{\vec{a}}$$
$$= -2a_i \operatorname{sen}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

En este capítulo trataremos con detalle el caso $n = 2$. Por lo tanto tenemos:

1) La derivada parcial de f respecto a x en el punto $(x_0, y_0) \in D$, la cual denotaremos por $f_x(x_0, y_0)$ o por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0)$, se define como el límite,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.6}$$

en el caso de que este límite exista.

2) La derivada parcial de f respecto a y en el punto $(x_0, y_0) \in D$, la cual denotaremos por $f_y(x_0, y_0)$ o por $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, se define como el límite,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.7}$$

en el caso de que este límite exista.

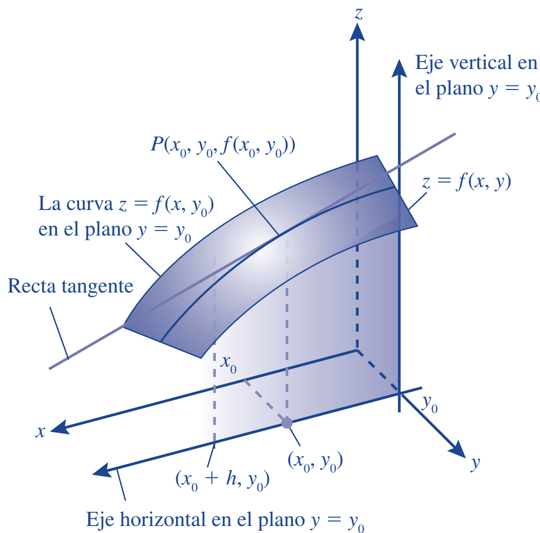


Figura 3.6. Derivada parcial respecto a x

La derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ la podemos calcular como la derivada ordinaria respecto a x de una función $g(x)$ definida por $g(x) = f(x, y_0)$ y luego evaluando en $x = x_0$, es decir $f_x(x_0, y_0) = g'(x_0)$ donde $g(x) = f(x, y_0)$. De manera análoga $f_y(x_0, y_0) = h'(y_0)$, donde $h(y) = f(x_0, y)$.

El número que representa la derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ lo podemos interpretar como la *pendiente de la recta tangente* a la curva C, que es la intersección de la superficie Σ (gráfica de la función) con el plano vertical $y = y_0$, en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (v. figura 3.6).

De manera análoga podemos interpretar la derivada parcial respecto a y, $f_y(x_0, y_0)$ (v. figura 3.7).

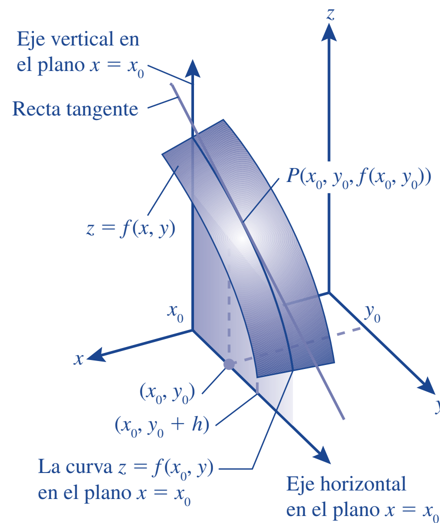


Figura 3.7. Derivada parcial respecto a y

Las dos rectas tangentes definen el plano tangente a la supercie (gráfica de f) en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (v. figura 3.8).

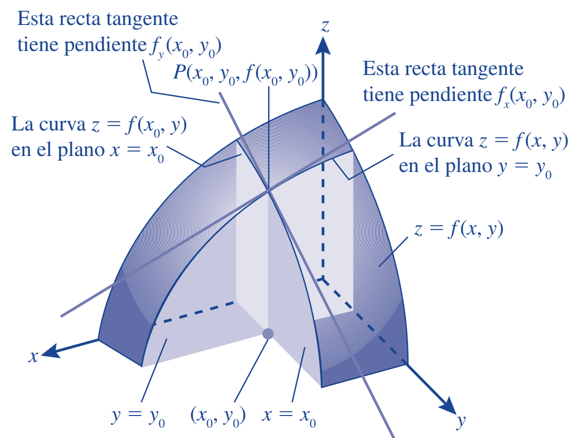


Figura 3.8. Derivadas parciales respecto a x y respecto a y

Las funciones en varias variables pueden estar bien definidas no sólo con fórmulas explícitas, sino también conociendo o su gráfica o las gráficas de sus

curvas (superficies) de nivel o incluso conociendo los valores en algunos puntos de su dominio mediante una tabla. En los siguientes ejemplos se muestra cómo calcular las derivadas parciales en estos casos.

Ejemplo 3.10. (función definida mediante una tabla). Consideremos la función

$$z = f(x, y) = x^2 - y. \tag{3.8}$$

Construyamos una tabla alrededor el punto (1, 1).

x \ y	0	1	2
0	0	−1	−2
1	1	0	−1
2	4	3	2

Podemos dar un estimativo de derivada parcial f_x en el punto (1, 1). Para esto podemos seguir el siguiente procedimiento:

Tomamos $h = 1$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6:

$$N_1 = \frac{f(1+1, 1) - f(1, 1)}{1} = \frac{3-0}{1} = 3. \tag{3.9}$$

Ahora tomamos $h = -1$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6:

$$N_2 = \frac{f(1-1, 1) - f(1, 1)}{-1} = \frac{-1-0}{-1} = 1. \tag{3.10}$$

Finalmente,

$$f_x(1, 1) \approx \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{3+1}{2} = 2\,. \tag{3.11}$$

Comparemos este estimativo con el valor obtenido

$$f_x(1, 1) = 2x|_{(1,1)} = 2. \tag{3.12}$$

En este caso coinciden pero esto no sucederá generalmente, esto depende de la función y del valor de h, el cual lo tomamos con la información de la tabla como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11. (función definida mediante una tabla). Consideremos la función

$$z = f(x, y) = x^3 - y. \tag{3.13}$$

Construyamos una tabla alrededor el punto (1, 1).

x \ y	0	1	2
0	0	−1	−2
1	1	0	−1
2	8	7	6

Podemos dar un estimativo de derivada parcial f_x en el punto (1, 1). Para esto podemos seguir el siguiente procedimiento:

Tomamos $h = 1$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6:

$$N_1 = \frac{f(1+1, 1) - f(1, 1)}{1} = \frac{7-0}{1} = 7. \tag{3.14}$$

Ahora tomamos $h = -1$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6:

$$N_2 = \frac{f(1-1, 1) - f(1, 1)}{-1} = \frac{-1-0}{-1} = 1. \tag{3.15}$$

Finalmente,

$$f_x(1, 1) \approx \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{7+1}{2} = 4. \tag{3.16}$$

Comparemos este estimativo con el valor obtenido

$$f_x(1, 1) = 3x^2\big|_{(1,\,1)} = 3. \tag{3.17}$$

Podemos construir la tabla de otras informaciones que conozcamos de la función alrededor de un punto, por ejemplo, conocida la gráfica de las curvas de nivel alrededor del punto o la gráfica de la función.

Ejemplo 3.12. (función definida mediante una tabla). Sea $z = f(x, y)$ una función definida sobre el rectángulo,

$$R = [1, 3] \times [0, 4] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}.$$

x \ y	0, 0	1, 0	2, 0	3, 0	4, 0
1, 0	1, 0	0, 0	−27, 0	−128, 0	−375, 0
1, 5	5, 1	7, 8	−21, 4	−136, 7	−415, 9
2, 0	16, 0	27, 0	0, 0	−125, 0	−432, 0
2, 5	39, 1	64, 3	45, 6	−83, 2	−411, 9
3, 0	81, 0	128, 0	125, 0	0, 0	−343, 0

Con la información que nos brinda la tabla y suponiendo que la función es continua, suave y que en puntos intermedios del dominio, donde no tenemos información, la función no tenga cambios bruscos, podemos decir:

1) El máximo de f en R es 128, 0 y lo obtiene en (3, 0, 1, 0). El mínimo es −432, 0 y lo obtiene en (2, 0; 4, 0).

2) Podemos dar un estimativo de derivada parcial en cualquier punto dado en la tabla, por ejemplo en (2, 1), $f_x(2, 1)$. Para esto podemos seguir el siguiente procedimiento:

   a) Tomamos $h = 0, 5$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6 sin tener en cuenta el límite,

$$N_1 = \frac{f(2, 0 + 0, 5; 1, 0) - f(2, 0; 1, 0)}{0, 5} = \frac{64, 3 - 27, 0}{0, 5} = 74, 6. \tag{3.18}$$

   b) Ahora tomamos $h = -0, 5$ y sustituimos en la fórmula de la definición 3.6 sin tener en cuenta el límite,

$$N_2 = \frac{f(2, 0 - 0, 5; 1, 0) - f(2, 0; 1, 0)}{-0, 5} = \frac{7, 8 - 27, 0}{-0, 5} = 38, 4. \tag{3.19}$$

c) Finalmente, un valor aproximado de la derivada parcial es el promedio de los valores obtenidos en los dos pasos anteriores:

$$f_x(2,0,1,0) \approx \frac{N_1 + N_2}{2} = 56,5. \tag{3.20}$$

La derivada parcial de una función escalar $f(x, y)$ respecto a x, similarmente respecto a y, en un punto (x_0, y_0) si existe, es un número y la derivada parcial de $f(x, y)$ en general en (x, y) es de nuevo una función escalar en las variables x y y. Por esta razón es posible calcular las *derivadas parciales de orden superior*, es decir las segundas derivadas parciales, las cuales denotaremos por:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Teorema 3.1 (Clairaut). Si $f(x, y)$ está definida en un disco D con centro en (a, b) y radio $r > 0$, y además posee sus segundas derivadas parciales f_{xy} y f_{yx} continuas en D, entonces,

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b). \tag{3.22}$$

Definición 3.5. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que es *suave* si todas sus derivadas parciales de todos los órdenes existen. Si las primeras derivadas parciales hasta el orden k existen y son continuas, decimos que la función f es de clase C^k y escribimos $f \in C^k$.

Ejemplo 3.13. Para la función

$$f(x, y) = x^2 \cos(xy) \tag{3.23}$$

las segundas derivadas parciales cruzadas son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy),\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= -3x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^3 y\cos(xy),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x^3 \operatorname{sen}(xy),\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= -3x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^3 y\cos(xy).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Ejemplo 3.14. Sea $f(x, y) = x \operatorname{sen}(x^2 y)$. La derivada parcial $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(1, 0)$ la calculamos así:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 \cos(x^2 y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -x^5 \operatorname{sen}(x^2 y),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= -5x^4 \operatorname{sen}(x^2 y) - 2x^6 y\cos(x^2 y),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(1, 0) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Veamos un ejemplo para calcular derivadas parciales de orden superior.

Ejemplo 3.15. Sea $f(x, y) = \int_x^y 4t^3\, dt$.

Hallar $f(0, 1)$, $f_x(1, 1)$, $f_y(-1, 0)$ y $f_{xy}(2, 3)$.
Hallaremos estas derivadas parciales de dos formas diferentes.

1) La primera forma es usando el teorema fundamental del cálculo (parte 1):[1]

$$\begin{aligned}
f(0, 1) &= \int_0^1 4t^3\, dt = t^4\big|_0^1 = 1,\\
f_x &= \frac{d}{dx}\int_x^y 4t^3\, dt = -\frac{d}{dx}\int_y^x 4t^3\, dt = -4x^3 \Rightarrow f_x(1, 1) = -4,\\
f_y &= \frac{d}{dy}\int_x^y 4t^3\, dt = 4y^3 \Rightarrow f_y(-1, 0) = 0,\\
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-4x^3\right) = 0 \Rightarrow f_{xy}(2, 3) = 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

[1]TFC (parte 1): si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, con $a \leq x \leq b$ es continua sobre $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además su derivada es $g'(x) = f(x)$.

2) La segunda forma es usando el Teorema Fundamental del Cálculo (parte 2):[2]

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_x^y 4t^3\, dt = t^4\big|_x^y = y^4 - x^4, \\
f(0, 1) &= 1, \\
f_x(1, 1) &= -4x^3\big|_{(1;1)} = -4, \\
f_y(-1, 0) &= 4y^3\big|_{(\otimes 1;0)} = 0, \\
f_{xy}(2, 3) &= 0.
\end{aligned}
$$

3.2.1 Plano tangente

Recordemos que la ecuación de un plano que pasa por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el cual tiene un vector normal $\vec{N} = (a, b, c)$ es (v. 1.12),

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3.28)$$

Sea $z = f(x, y)$ una función suave para (x_0, y_0). El *plano tangente* a la gráfica de la función f en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es,

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (3.29)$$

El vector $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ es un vector normal al gráfico de $f(x, y)$ en el punto P.

3.2.2 Recta normal

Recordemos que la ecuación paramétrica de una recta que pasa por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ con un vector director $\vec{v} = (l, m, n)$ es (v. 1.7),

$$x(t) = x_0 + tl, \quad y(t) = y_0 + tm, \quad z(t) = z_0 + tn. \qquad (3.30)$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la *recta normal* a la gráfica de la función f en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$x(t) = x_0 + tf_x(x_0, y_0), \quad y(t) = y_0 + tf_y(x_0, y_0), \quad z(t) = z_0 - t. \qquad (3.31)$$

[2]TFC (parte 2): Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada (primitiva) de f, es decir $F' = f$.

Ejemplo 3.16. La ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en $P(1, 1, 1)$ es

$$
\begin{aligned}
&f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - (z - 1) = 0, \\
&-2x\big|_{(1;1)}(x - 1) - 2y\big|_{(1,1)}(y - 1) - z + 1 = 0, \\
&-2(x - 1) - 2(y - 1) - z + 1 = 0, \\
&2x + 2y + z - 5 = 0.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

La ecuación paramétrica de la recta normal a la gráfica de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en $P(1, 1, 1)$ es,

$$x(t) = 1 - 2t, \qquad y(t) = 1 - 2t, \qquad z(t) = 1 - t. \tag{3.33}$$

3.3 Ejercicios del capítulo 3

Ejercicios recomendados: 1-9, 14, 16-22.

Ejercicio 3.1. Halle el dominio de la función:

1) $f(x, y) = \ln(x^2 + y + 1)$.

2) $f(x, y, z) = \ln(17 - x^2 - y^2 - z^2)$.

3) $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{7} - x^2 - \frac{1}{7}y^2\right)$.

4) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y - 1)}{x + 7y}$.

5) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1} + \ln(8 - x^2 - 2y^2) + e^y \operatorname{sen} x$.

6) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x}}{\ln(y + x)}$.

7) $f(x, y, z) = \ln(8 - 2x^2 - 2y^2 - z^2)$.

Ejercicio 3.2. Determine el rango de la función:

1) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2} + \ln(x + y - 1)}$.

2) $f(x, y, z) = \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2)$.

Ejercicio 3.3. Halle el dominio, haga un bosquejo de las gráficas y dibuje algunas curvas de nivel de las siguientes funciones:

1) $f(x, y) = x^2 + y$.

2) $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.

3) $f(x, y) = g(x, y)/h(x, y)$, donde $g(x, y) = (x + y - 1)$, $h(x, y) = x + 1$.

Ejercicio 3.4. Halle el dominio de las funciones siguientes y haga un bosquejo de algunas superficies de nivel de:

1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

3) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$.

4) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Ejercicio 3.5. Utilice la definición de derivada parcial (3.4) para encontrar f_x y f_y donde,

1) $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$,

2) $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + 5y^2$.

Ejercicio 3.6. En la tabla 3.1 se muestran algunos valores de la función $f(x, y)$:

Tabla 3.1. $f(x, y)$ conocidos algunos datos mediante una tabla

x \ y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
−3	−30	−9	6	15	18	15	6	−9	−30
−2	−40	−19	−4	5	8	5	−4	−19	−40
−1	−46	−25	−10	−1	2	−1	−10	−25	−46
0	−48	−27	−12	−3	0	−3	−12	−27	−48
1	−46	−25	−10	−1	2	−1	−10	−25	−46
2	−40	−19	−4	5	8	5	−4	−19	−40
3	−30	−9	6	15	18	15	6	−9	−30
4	−16	5	20	29	32	29	20	5	−16

1) Hallar $f(1, 2)$, $f(2, -3)$.

2) Hallar un estimativo para $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$.

3) Hallar un estimativo para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

4) Hallar un estimativo para $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2)$.

Ejercicio 3.7. En la figura 3.9 se muestran algunas curvas de nivel correspondientes a una función $f(x, y)$. Estas curvas, $f(x, y) = c$ son hipérbolas para cada valor constante de c. Se muestran las curvas de nivel para $c = -10, -5, -1, 2, 5$;

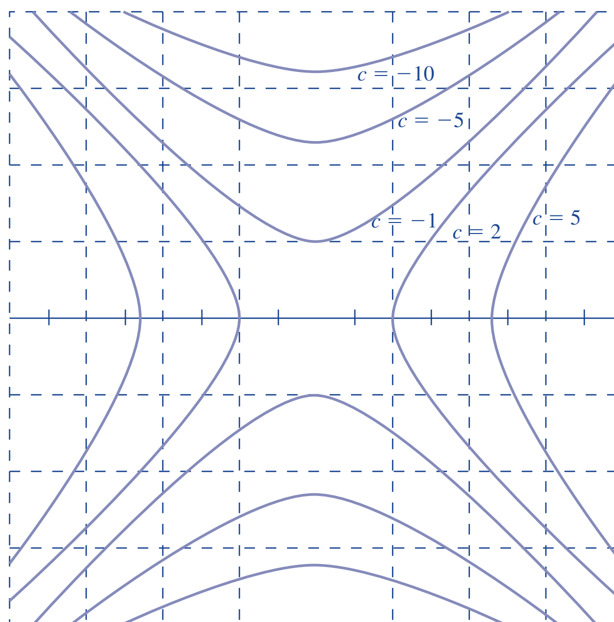


Figura 3.9. $f(x, y)$ conocidas algunas curvas de nivel

1) Hallar $f(1, 2)$, $f(2, 1)$.

2) Hallar un estimativo para $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$.

3) Hallar un estimativo para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$.

Ejercicio 3.8. La figura 3.10 muestra la gráfica de una función $f(x, y)$.

Según esta gráfica, llene la casilla en blanco con positiva, negativa o cero, según sea el caso.

1) La primera derivada parcial $f_x(0, 4)$. . . . . ☐

2) La primera derivada parcial $f_x(-2, 4)$. . . . . ☐

3) La primera derivada parcial $f_y(4, 2)$. . . . . ☐

4) La segunda derivada parcial $f_{yy}(4, 2)$. . . . . ☐

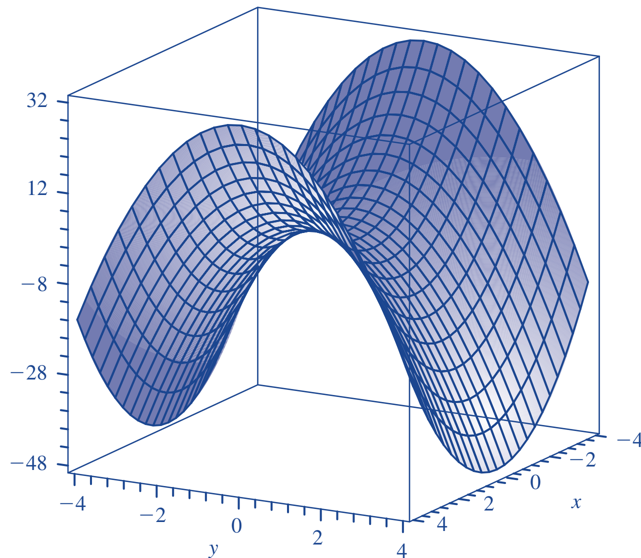


Figura 3.10. Gráfica de $f(x, y)$

Ejercicio 3.9. Encuentre f_x y f_y donde,

1) $f(x, y) = x^2 e^{-x^2 - y^3}$;

2) $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^4 y$;

3) $f(x, y) = 8x^5 + 6x^3 y^2 + 3xy^4$;

4) $f(x, y) = \int_y^x \cos t^6 \, dt$.

Ejercicio 3.10. Encuentre las primeras derivadas parciales de la función.

1) $c = \ln (a + \sqrt{a^2 + b^2})$.

2) $u = \cos (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$.

Ejercicio 3.11. Encuentre u_t,

$$u = xe^{-9t} \operatorname{sen} \theta.$$

Ejercicio 3.12. Encuentre $f_y(-25, 5)$:

$$f(x, y) = \operatorname{sen} (2x + 10y).$$

Ejercicio 3.13. Si

$$f(x, y) = 5 - 5x^2 - 6y^2,$$

seleccione la opción correcta.

A. $f_x(6, 3) = -31$, $f_y(6, 3) = -55$,

B. $f_x(6, 3) = -36$, $f_y(6, 3) = -60$,

C. $f_x(6, 3) = -60$, $f_y(6, 3) = -36$,

D. $f_x(6, 3) = -60$, $f_y(6, 3) = -31$,

E. $f_x(6, 3) = -55$, $f_y(6, 3) = -31$.

Ejercicio 3.14. Dada la función $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$, hallar:

1) la primera derivada parcial $f_x(1, 1)$,

2) la primera derivada parcial $f_x(-2, 1)$,

3) la primera derivada parcial $f_y(4, -2)$,

4) la segunda derivada parcial $f_{xx}(0, 0)$,

5) la segunda derivada parcial $f_{yy}(0, 0)$,

6) la segunda derivada parcial cruzada $f_{xy}(0, 0)$.

Ejercicio 3.15. 1) Sea $f(x, y) = \int_x^y \text{sen}(t^2)\, dt$.

Hallar $f(1, 1)$, $f_x(1, 2)$, $f_y(-1, 2)$ y $f_{xy}(2, 5)$.

2) Sea $f(x, y) = \text{sen}\, x \int_{y^2}^{\text{sen}\, x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Hallar $f(0, 0)$, $f_x(0, 2)$, $f_y(-1, 0)$ y $f_{xy}(0, 0)$.

3) Sea $f(x, y, z) = z^{x/y}$, hallar: f_x, f_y, f_z.

Ejercicio 3.16. Encuentre todas las segundas derivadas parciales de la función,

$$f(x, y) = x^4 - 7x^2 y^3.$$

Ejercicio 3.17. Encuentre $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ donde,

$$z = y \tan 4x.$$

Ejercicio 3.18. Encuentre f_{xxx} para

$$f(x, y) = x^2 y^9 - 2x^4 y.$$

Ejercicio 3.19. Encuentre

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}, \text{ donde } u = x^a y^b z^c \text{ y } a > 1,\ b > 2,\ c > 3.$$

Ejercicio 3.20. Conteste *falso* o *verdadero*. Justifique matemáticamente.

1) Si $f(x, y, z) = \frac{x^2}{1 + y^2 + z^2}$, entonces $\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x \partial^2 y \partial z} = 0$.

2) Si $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, entonces $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

Ejercicio 3.21. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie representada por la ecuación en el punto indicado.

1) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 1, 2)$.

2) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $P(3, 4, 5)$.

3) $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$ en $P(1/2, 1/2, 1/2)$,

4) $z = \sqrt{35 - x^2 - 2y^2}$ en P $(4, 3, 1)$.

Ejercicio 3.22. Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie representada por la ecuación en el punto indicado.

1) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ en $P(1, 1, 2)$.

2) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $P(3, 4, 5)$.

3) $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$ en $P(1/2, 1/2, 1/2)$.

4) $z = \sqrt{35 - x^2 - 2y^2}$ en $P(4, 3, 1)$.

Ejercicio 3.23. La temperatura en un punto (x, y) en una placa de metal plana está definida por:

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + y^2},$$

donde T se mide en C° y x y y en metros. Calcule la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto (2, 1) en la dirección de x y en la dirección de y.

Ejercicio 3.24. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 unidas en un circuito eléctrico en paralelo está dada por la fórmula:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Encuentre $\dfrac{\partial R}{\partial R_3}$.

CAPÍTULO 4 Gradiente

4.1 Funciones derivables

Definición 4.1. Una función $z = f(x, y)$ es derivable sobre (a, b) si

$$f(a + p, b + q) - f(a, b) = Ap + Bq + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 q,$$

donde A y B son números, y $\varepsilon_1(p, q)$, $\varepsilon_2(p, q) \to 0$ si $p, q \to 0$.

Ejemplo 4.1. Sea $f(x, y) = x^2 - 2y^2$. Calculemos

$$\begin{aligned} f(a + p, b + q) - f(a, b) &= (a + p)^2 - 2(b + q)^2 - (a^2 - 2b^2) \\ &= 2ap - 4bq + p^2 - 2q^2. \end{aligned}$$

Consideremos $2ap - 4bq + p^2 - 2q^2$ como una función de p y q. Entonces, los coeficientes A y B de los términos del grado primero p y q son números reales $A = 2a$ y $B = -4b$. Luego, los términos del grado superior con respecto a p y q nos dan las funciones $\varepsilon_1(p, q) = p$ y $\varepsilon_2(p, q) = -2q^2$, y, si $p, q \to 0$ entonces $\varepsilon_1(p, q)$, $\varepsilon_2(p, q) \to 0$. Obtenemos que la función $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ es derivable en cada punto (a, b).

♦

Lema 4.1. Si una función es diferenciable en (a, b), entonces $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$f(a + p, b + q) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)p + \frac{\partial f}{\partial xy}x(a, b)q + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 q.$$

Demostración:
Sea $q = 0$, entonces $f(a + p, b) - f(a, b) = Ap + \varepsilon, p$

luego $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{f(a + p, b) - f(a, b)}{p} = \lim\limits_{p \to 0} \dfrac{Ap + \varepsilon_1 p}{p} = A$

Lema 4.2. Si una función $f(x, y)$ es derivable en un punto (a, b), entonces es continua en (a, b).

Teorema 4.1. Sea $f(x, y)$ una función definida en un conjunto abierto D. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en una vecindad de (a, b), entonces $f(x, y)$ es derivable en el punto $(a, b) \in D$.

Ejemplo 4.2. Sea $f(x, y) = y$ sen (x). Las derivadas parciales de f son: $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} =$ sen (x), y éstas son funciones continuas. Por lo tanto, f es derivable en todos los puntos (x, y) de su dominio.



Ejemplo 4.3. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

El dominio de f es todo el plano. Si queremos estudiar la derivabilidad de f en $(a, b) = (0, 0)$, podemos usar el teorema 4.1, pero si queremos estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$ usamos la definición 4.1. El lado izquierdo de la ecuación en la definición 4.1 es igual a

$$f(0 + p, 0 + q) - f(0, 0) = \frac{pq}{p^2 + q^2}$$

donde (p, q) es cualquier punto en alguna vecindad de $(0, 0)$ $((p, q) = (0, 0))$. En particular si $p = q = k$ tenemos que $f(k, k) = \frac{1}{2}$ para todos los valores $k \neq 0$. Para este mismo punto el lado derecho de la definición 4.1 es igual a

$$Ak + Bk + \varepsilon_1 k + \varepsilon_2 k,$$

la cual tiende a cero cuando $k \to 0$. ¡Obtenemos una contradicción! $(1/2 = 0)$. Por lo tanto f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Nota 4.1. En el ejemplo 4.3 los valores de A y B de la definición 4.1, que son las derivadas parciales de f en $(0, 0)$ se pueden calcular usando la definición de derivadas parciales, y mostrar que ambas son iguales a cero. Además se puede probar que la función f en el punto $(0, 0)$ no es continua mostrando que el límite de $f(h, k)$ cuando (h, k) tiende al punto $(0, 0)$ por el camino $y = 0$ es igual a cero y por el camino $y = x$ es $\frac{1}{2}$. Con lo cual tendríamos otra manera de demostrar, usando el recíproco del lema 4.2, que f no es en $(0, 0)$. Finalmente, usando el recíproco del teorema 4.1, y por simetría de la función, podemos demostrar que las derivadas parciales, f_x, f_y, a pesar de que existen en $(0, 0)$, no son continuas.

Nota 4.2. En los capítulos 4 y 5 suponemos que todas las funciones tienen todas las derivadas parciales (estas funciones se llaman *funciones suaves*).

4.2 Regla de la cadena

Sea u una función derivable en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supongamos que cada x_i es una función derivable en las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Consideremos la función compuesta,

$$v(t_1, t_2, \ldots, t_m) = u(x_1 (t_1, \ldots, t_m), x_2 (t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n (t_1, \ldots, t_m)). \tag{4.1}$$

Introducimos las siguientes notaciones: $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, $\bar{x} = (x_1 \ldots, x_n)$ y

$$\bar{x}(\bar{t}) = (x_1(t_1, \ldots, t_m), x_2(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m)).$$

Teorema 4.2 (regla de la cadena). La función compuesta v 4.1 es una función derivable en las variables $t_1, \ldots, t_n$, y

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}(\bar{t}))\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}(\bar{t}))\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\bar{x}(\bar{t}))\frac{\partial x_n}{\partial t_i}. \tag{4.2}$$

Ejemplo 4.4. Sea $v(t) = u(x(t), y(t))$. Entonces, $n = 2$ y $m = 1$, y tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}.$$



Ejemplo 4.5. Supongamos que $v(p, q) = f(x(p, q), y(p, q))$. Entonces, $n = 2$ y $m = 2$, y luego

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial x}(x(p,q), y(p,q))\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(p,q), y(p,q))\frac{\partial y}{\partial p},$$
$$\frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial x}(x(p,q), y(p,q))\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(p,q), y(p,q))\frac{\partial y}{\partial q}.$$



Ejemplo 4.6. Si queremos saber cómo cambia la función $u(x, y) = y \operatorname{sen}(x)$ a lo largo de la parábola $x(t) = t$, $y = t^2$, y además encontrar sus valores extremos restringiendo su dominio a puntos sobre la parábola, podemos tomar la función $g(t) = u(x(t), y(t))$ y calcular su derivada. Por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}. \tag{4.3}$$

Calculamos,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y \cos\ x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sen}\ x,$$

y luego sustituimos $x = x(t) = t$ y $y = y(t) = t^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(x(t), y(t)) = y(t) \cos\,(x(t)) = t^2 \cos t,\ \frac{\partial u}{\partial y}\,(x(t), y(t)) = \operatorname{sen}\,(x(t)) = \operatorname{sen}\,(t).$$

Al mismo tiempo,

$$\frac{dx}{dt}(t) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(t) = 2t.$$

Ahora, usando la ecuación (4.3), tenemos:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} = t^2 \cos\ t + 2\ t \operatorname{sen} t\,. \quad (4.4)$$

Para verificar (4.4), podemos sustituir los valores de x y y en u, luego hallar la derivada ordinaria de una función en una sola variable: $g(t) = u(x(t), y(t)) = t^2 \operatorname{sen} t$, entonces

$$\frac{dg}{dt} = 2t \operatorname{sen} t + t^2 \cos t, \quad (4.5)$$

y los resultados (4.4) y (4.5) coinciden. ♦

Ejemplo 4.7. (**ejercicio resuelto**). Sean $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = uv^2$, $g(u, v) = f\,(x(u, v), y(u, v))$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en el punto $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en el punto $x = 2$, $y = 1$.

Usando la regla de la cadena tenemos que.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}v^2$$

y de nuevo aplicando esta regla calculamos la segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right) v^2 + 2v\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) v^2 + 2v\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sabemos que $x(1, 1) = 2$, $y(1, 1) = 1$, entonces,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1).$$

Además por el teorema de Clairaut tenemos, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)$, por lo tanto obtenemos finalmente que, $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1, 1) = 8$. ♦

4.3 Teorema de la función implícita

Teorema 4.3. Sea $F(x, y, z)$ una función derivable. Si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces existe una función derivable $z = f(x, y)$ cuyo dominio es una vecindad del punto (x_0, y_0), $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y tal que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ para todos los puntos $(x, y) \in V$ y $f(x_0, y_0) = z_0$.

Además, sean $z = f_1(x, y)$ y $z = f_2(x, y)$ dos funciones que satisfacen esta condición, entonces $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son iguales en la intersección de sus dominios.

Se dice que la función $z = f(x, y)$ está *determinada implícitamente* por la función $F(x, y, z) = 0$.

Ejemplo 4.8. Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Tenemos que $F(0, 0, 1) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z} z(0, 0, 1) = 2z|_{(0,0,1)} = 2 \neq 0$. Entonces, existe una función derivable $z = f(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 + (f(x, y))^2 - 1 = 0$ y $f(0, 0) = 1$. En este caso la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ cuyo dominio es el círculo $x^2 + y^2 < 1$, satisface la condición $x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 - 1 = 0$, y $f(0, 0) = 1$.

Note que hay dos funciones $f(x, y)$ con la propiedad de que $x^2 + y^2 + (f(x, y))^2 - 1 = 0$, $f_+ = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $f_- = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, sin embargo tenemos que $f_-(0, 0) = -1 \neq 1$. Las gráficas de las funciones f_+ y f_- son los dos hemisferios norte y sur respectivamente de una esfera unitaria centrada en el origen. ♦

4.4 Derivación implícita

Supongamos que la función $u(x_1, \ldots, x_n)$ está definida en forma implícita por medio de una ecuación,

$$F(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Para calcular la derivada parcial de u respecto a x_i, se utiliza la siguiente regla de derivación implícita:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}}. \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.9. (**ejercicio resuelto**). Sea $z = u(x, y)$ la función definida implícitamente por la ecuación

$$xy + z^2 x^2 - 1 = 0$$

en una vecindad del punto $(-2, 4)$ tal que $u(-2, 4) = -3/2$. Calcule la derivada de la función z respecto a x en el punto $(-2, 4)$.

En primer lugar verificamos que la función $z = u(x, y)$ existe. Sea $f(x, y, z) = xy + z^2 x^2 - 1$. Entonces $f(-2, 4, -3/2) = 0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(-2, 4, -3/2) = 2zx^2\Big|_{x=-2, y=4, z=-3/2} = -12 \neq 0.$$

Por el teorema 4.3, la función $z = u(x, y)$ existe tal que

$$xy + u^2(x, y)x^2 - 1 = 0 \tag{4.7}$$

y

$$u(-2, 4) = -3/2.$$

Luego encontramos la derivada usando la fórmula (4.6).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2zx^2.$$

Obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4) = -\frac{y + 2xz^2}{2zx^2}\bigg|_{x=-2, y=4, z=-3/2} = -\frac{5}{12}.$$

Hay otra opción para encontrar el valor $\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4)$. Tomamos la derivada de la igualdad (4.7) con respecto a la variable x:

$$y + 2x^2 u(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2(x, y)x = 0. \tag{4.8}$$

En esta igualdad sustituimos $x = -2$, $y = 4$ y $u(-2, 4) = -3/2$. Entonces

$$4 + 2 \cdot 4 \cdot (-3/2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \cdot (-3/2)^2 \cdot (-2) = 0,$$

desde donde de nuevo obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial x}(-2, 4) = -5/12$. ♦

Ejemplo 4.10. **(ejercicio resuelto)**. Demostrar que la ecuación $xy = \text{sen}(z + x)$ define una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(0, 0)$ tal que $f(0, 0) = 0$. Luego hallar la segunda derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

Sea $F = xy - \text{sen}\,(x + z)$, entonces $F(0, 0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, por el teorema 4.3 existe una función $z = f(x, y)$ definida en una vecindad de $(0, 0)$.

Luego tenemos la igualdad

$$xy - \text{sen}\,(x + f(x, y)) = 0$$

y tomamos las derivadas con respecto a los variables x y y:

$$y - \cos(x + f(x, y))(1 + \frac{\partial f}{\partial x}) = 0; \tag{4.9}$$

$$x - \cos(x + f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{4.10}$$

Sustituimos $x = y = 0$ y $f(0, 0) = 0$ en estas igualdades, entonces (4.9) implica que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$ y (4.10) implica que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Luego derivamos (4.10) con respecto a x y obtenemos la igualdad

$$1 + \operatorname{sen}(x + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \cos(x + f(x,y))\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \tag{4.11}$$

En (4.11) sustituimos $x = y = 0, f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ y obtenemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

4.5 Derivadas direccionales y el vector gradiente

Definición 4.2 (Derivada direccional). Sea f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, donde D es un conjunto abierto, una función escalar en las variables x y y. La derivada direccional respecto a un vector unitario $\to u = (a, b)$, en un punto $(x_0, y_0) \in D$, la denotaremos por $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$, y se define como el límite,

$$D_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}, \tag{4.12}$$

donde $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, en el caso de que este límite exista.

Nota 4.3. Si $\vec{u} = (1,0), D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, y, para $\vec{u} = (0,1)$, $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, es decir las derivadas parciales son casos particulares de la derivada direccional de una función en un punto.

Nota 4.4. La fórmula (4.12) que define la derivada direccional la podemos interpretar de la siguiente manera: en el punto (x_0, y_0) trazamos una recta ℓ por este punto en la dirección del vector unitario $\vec{u} = (a, b)$. La parametrización de ℓ es $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$. Ahora restringimos la función f a esta recta y llamamos a esta restricción g, por lo tanto

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb). \tag{4.13}$$

La derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ es igual a la derivada de g en $h = 0$, $g'(0)$. Esto justifica el nombre *derivada direccional*.

Teorema 4.4. Si una función $f(x, y)$ es derivable en un punto (x_0, y_0) de su dominio, entonces, para un vector unitario $\vec{u} = (a, b)$, se tiene que

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b. \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.11. Sean $f(x, y) = x^2y$ y $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ el vector unitario en el punto $A(1, -1)$. Calculemos la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto A respecto al vector $\vec{u}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 1$. Usamos la formula (4.14) y obtenemos que:

$$D_{\vec{u}} f(1, 1) = -2 \cdot (1/\sqrt{2}) + 1 \cdot (-1/\sqrt{2}) = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Definición 4.3. El *vector gradiente* de una función derivable f en (x_0, y_0) de su dominio se denota por $\nabla f(x_0, y_0)$ y se define por:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ejemplo 4.12. Sea $f(x, y) = x^2 + xy^2$. Entonces el vector gradiente de f en cualquier punto (x, y) es $\nabla f(x, y) = (2x + y^2, 2xy)$. Por ejemplo, en el punto $A(-1, 2)$ tenemos que $\nabla f(A) = (2, -4)$. ♦

De la ecuación (4.14) obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.5. Sea $f(x, y)$ una función derivable en un dominio D, entonces

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

para todo $(x, y) \in D$.

Teorema 4.6. Sea $f(x, y)$ una función derivable en un dominio D. El valor máximo de la derivada direccional en un punto $(x_0, y_0) \in D$, $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$, es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ y se obtiene cuando vector unitario $\vec{u}$ tiene la misma dirección del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

Es decir, en un punto (x_0, y_0) la gráfica de la función f tiene máxima *pendiente* en la dirección del gradiente en ese punto, con valor $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. De manera similar la pendiente de menor valor se obtiene en el sentido opuesto del gradiente en ese punto. Igualmente, podemos decir que la función crece más rápido en la dirección del vector gradiente y decrece más rápido en la dirección opuesta.

Ejemplo 4.13. Consideremos la función $f(x, y) = xy - x^3$. El vector gradiente de f es $\nabla f(x, y) = (y - 3x^2, x)$, entonces en el punto $A(2, 3)$ tenemos que $\nabla f(A) = (-9, 2)$. Por eso la función f crece más rápido en la dirección del vector $(-9, 2)$, decrece más rápido en la dirección del vector $(9, -2)$, y en la dirección ortogonal a $\nabla f(A)$, por ejemplo en la dirección del vector $(2, 9)$, la función $f(x, y)$ no crece y no decrece. ♦

Teorema 4.7. El vector gradiente de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0), $\nabla f(x_0, y_0)$, es ortogonal a la curva de nivel de f en ese punto.

Demostración. Supongamos que la curva de nivel (v. definición 3.2) es parametrizada en términos del parámetro t: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$. Entonces, $g(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f[\vec{r}(t)] = f(x(t), y(t)) = c$ donde c es una constante. Por lo tanto derivando en ambos lados, usando la regla de la cadena y evaluando en t_0 tenemos que:

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}\Big|_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0}$$
$$= \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0.$$

Es decir el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\vec{r}\,'(t_0)$ de la curva de nivel que contiene el punto (x_0, y_0).

Nota 4.5. El anterior teorema es válido también para una función f en tres variables $f(x, y, z)$. En este caso se dice que el vector gradiente en un punto (x_0, y_0, z_0), $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, es ortogonal a la superficie de nivel c de F que contiene el punto (x_0, y_0, z_0).

Ejemplo 4.14. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. La curva de nivel que pasa por el punto $A(1, \sqrt{3})$ es la curva solución a la ecuación $f(x, y) = f(1, \sqrt{3}) = 4$, es decir es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 2^2$. Una ecuación paramétrica de esta circunferencia es: $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$, y $A = \vec{r}(\pi/3)$. Para encontrar el vector tangente en el punto A, calculamos $\vec{r}\,'(t) = (-2 \operatorname{sen}(t), 2 \cos t)$, entonces el vector tangente en el punto A a la curva de nivel que lo contiene es $\vec{r}\,'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, 1)$.

Por otro lado el vector gradiente en A es:

$$\nabla f(1, \sqrt{3}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,\sqrt{3})}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,\sqrt{3})}\right) = \left(2x\big|_{(1,\sqrt{3})}, 2y\big|_{(1,\sqrt{3})}\right) = (2, 2\sqrt{3}).$$

Así comprobamos que $\nabla f(1, \sqrt{3}) \cdot \vec{r}\,'(\pi/3) = 0$, es decir $\nabla f(1, \sqrt{3}) \perp \vec{r}\,'(\pi/3)$.

♦

Ejemplo 4.15. Dada una función en dos variables $z = g(x, y)$ podemos construir otra función en tres variables de la siguiente manera: $F(x, y, z) = g(x, y) - z$. El gráfico de la función $g(x, y)$ es la superficie de nivel cero de la función $F(x, y, z)$.

El vector gradiente de $F(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \tag{4.15}$$

y coincide con un vector normal del plano tangente a la gráfica de g en (x_0, y_0, z_0). Dado que por definición la ecuación del plano tangente a la gráfica de una función $g(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

y deducimos entonces que el vector gradiente de la función $F(x, y, z) = g(x, y) - z$, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, es ortogonal al plano tangente de la gráfica de la superficie de nivel cero. ♦

Ejemplo 4.16. En la figura 4.1 se muestran algunas curvas de nivel y el vector gradiente en muchos puntos de la función $f(x, y) = \text{sen}(xy)$. Las curvas de nivel c corresponden a hipérbolas equiláteras $xy = \text{arcsen}\, c$, con $c \in \text{Ran}(f) = [-1, 1]$. El vector gradiente en un punto (x, y) es $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$. La magnitud del vector gradiente se ha multiplicado por un escalar λ donde $0 < \lambda < 1$, es decir el vector gradiente se ha reescalado. Podemos observar que el vector gradiente intersecta ortogonalmente las curvas de nivel. ♦

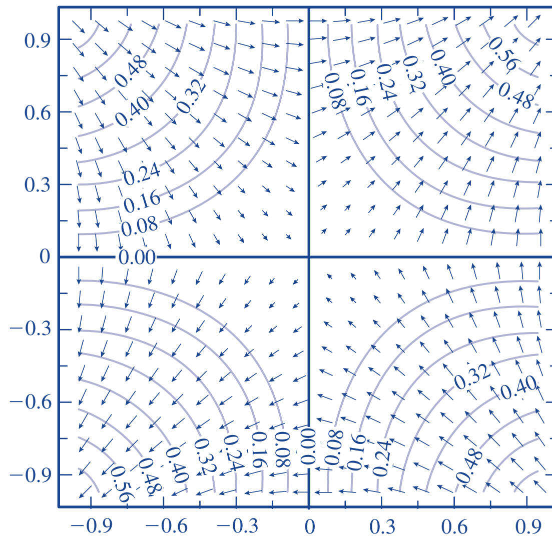


Figura 4.1. Vectores gradiente (reescalados) y curvas de nivel de la función $f(x,y) = \text{sen}(xy)$

4.6 Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie

En las secciones 2.1.5 y 3.2.1 vimos la recta tangente a una curva parametrizada y el plano tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Ahora vamos a ver la recta tangente a una curva dada por la ecuación $F(x, y) = 0$ y el plano tangente a una superficie dada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$

El hecho de que el vector gradiente sea ortogonal a las curvas de nivel de una función $F(x, y)$ (v. teorema 4.7) ayuda a encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la ecuación $F(x, y) = 0$.

Teorema 4.8. Dada una curva suave C en el plano $\mathbb{R}^2$ definida por la ecuación $F(x, y) = 0$, la *ecuación de la recta tangente* en un punto $(x_0, y_0) \in C$, donde $F(x_0, y_0) = 0$, es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

y la *ecuación paramétrica de la recta normal* es,

$$x(s) = x_0 + s\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad y(s) = y_0 + s\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ejemplo 4.17. (**ejercicio resuelto**). Encuentre la recta tangente y la recta normal a la curva dada por la ecuación $x^2 + 2y^2 = 9$ en el punto $A(1, 2)$ (v. figura 4.2).

Consideramos la función $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9$. La curva dada es el nivel $c = 0$ para esta función.

1) Verificamos que efectivamente $f(1, 2) = 0$.

2) Luego, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2) = 2$. De manera similar $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = 8$.

   Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es,

$$2(x - 1) + 8(y - 2) = 0 \Rightarrow x + 4y - 9 = 0.$$

3) Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son:

$$x(s) = 1 + s, \qquad y(s) = 2 + 4s.$$



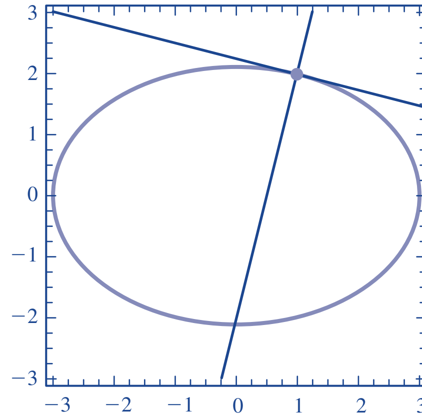


Figura 4.2. La recta tangente y la recta normal a la curva $x^2 + 2y^2 = 9$ en el punto (1, 2)

Ejemplo 4.18. **(ejercicio resuelto)**. Obtener la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 - y^3 = 3$ en el punto (2, 1) (v. figura 4.3).

1) Consideramos la función $F(x, y) = x^2 - y^3 - 3$. La curva dada es la curva de nivel $c = 0$ para esta función.

2) Verificamos que efectivamente $F(2, 1) = 0$.

3) Luego, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(2, 1) = 4$. De manera similar $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 1) = -3$.

   Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$4(x - 2) - 3(y - 1) = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0.$$

4) Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son:

$$x(s) = 2 + 4s, \qquad y(s) = 1 - 3s.$$



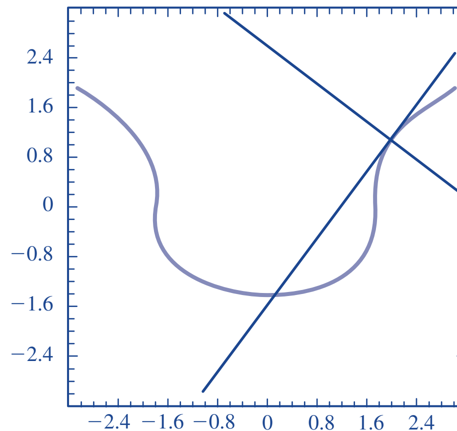


Figura 4.3. La recta tangente y la recta normal a la curva $x^2 - y^3 = 3$ en el punto (2, 1)

Teorema 4.9. Dada una superficie suave Σ definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, la ecuación del plano tangente en un punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ $(F(x_0, y_0, z_0) = 0)$ es,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal en P son,

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y(s) = y_0 + s\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z(s) = z_0 + s\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Ejemplo 4.19. Para obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ en el punto $(3, 4, 2)$ (v. figura 4.4), consideramos la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 29$. Verificamos que $F(3, 4, 2) = 0$. Luego, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(3, 4, 2) = 6$. Similarmente, $\frac{\partial F}{\partial y}(3, 4, 2) = 8$, $\frac{\partial F}{\partial z}(3, 4, 2) = 4$. Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en el punto $(3, 4, 2)$ es:

$$6(x - 3) + 8(y - 4) + 4(z - 2) = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 2z = 29$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal en el punto $(3, 4, 2)$ son:

$$x(s) = 3 + 3s, \qquad y(s) = 4 + 4s, \qquad z(s) = 2 + 2s.$$



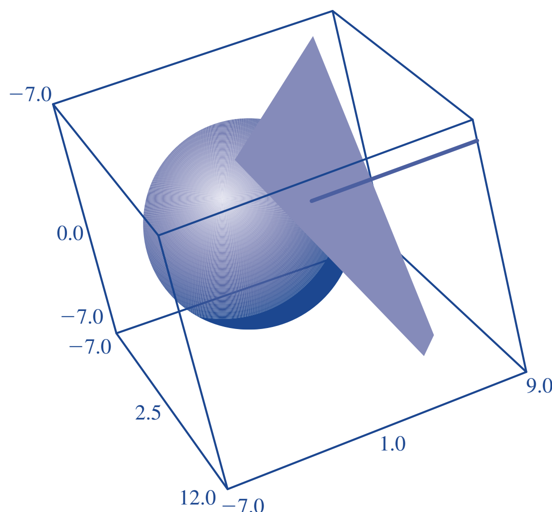


Figura 4.4. El plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ en el punto $(3, 4, 2)$

Ejemplo 4.20. Para obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $zx - \text{sen}(z + x - y) = 0$ en el punto (2, 2, 0) (v. figura 4.5), consideramos la función $F(x, y, z) = zx - \text{sen}(z + x - y)$. Verificamos que $F(2, 2, 0) = 0$. Luego, $\frac{\partial F}{\partial x} = z - \cos(z + x - y)$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(2, 2, 0) = -1$. Similarmente, $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 2, 0) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial z}(2, 2, 0) = 1$. Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en el punto (2, 2, 0) es,

$$-(x - 2) + (y - 2) + (z - 0) = 0 \Rightarrow x - y - z = 0,$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal en el punto (2, 2, 0) son:

$$x(s) = 2 - s, \qquad y(s) = 2 + s, \quad z(s) = s.$$



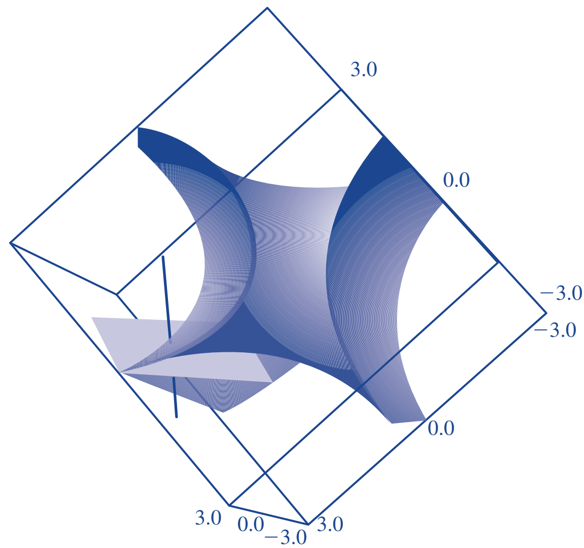


Figura 4.5. El plano tangente y la recta normal a la superficie $zx - \text{sen}(z + x - y) = 0$ en el punto (2, 2, 0)

4.7 Ejercicios del capítulo 4

Ejercicios recomendados: 1-7, 9, 10, 13-23, 25-27

Ejercicio 4.1. Sea $u = f(x, y, z)$ donde $x = x(r, s)$, $y = y(r)$, $z = z(s)$. Use la regla de la cadena para escribir la formula para: $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$.

Ejercicio 4.2. Sean $x(u, v, w) = u + vw$, $y(u, v, w) = uv^2 - w$, $g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w))$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}$ en el punto $u = 1$, $v = 1$, $w = 0$ sabiendo que,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

en el punto $x = 1$, $y = 1$.

Ejercicio 4.3. Aplique la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$, donde

$$z = e^r \cos\theta,\ r = 6st,\ \ \theta = \sqrt{s^2 + t^2}.$$

Ejercicio 4.4. Si $z = f(x, y)$, donde

$$x = g(t),\ y = h(t),\ g(3) = 4,\ g'(3) = 7,\ h(3) = 10,$$

$$h'(3) = -3,\ f_x(4, 10) = 8,\ f_y(4, 10) = -7,$$

encuentre $\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 3$.

Ejercicio 4.5. Aplique la regla de la cadena para hallar:

1) $\frac{\partial w}{\partial s}$ cuando $s = 10$ y $t = 0$, donde $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s\cos t$, $z = s \operatorname{sen} t$;

2) $\frac{\partial w}{\partial s}$ cuando $s = 0$ y $t = 8$, donde $w = xy + yz, + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$;

3) $\frac{\partial w}{\partial v}$ cuando $t = 4$, $u = 3$ y $v = 0$, donde $w = y^2 \tan x$, $x = t^2 uv$, $y = u + tv^2$.

Ejercicio 4.6. Aplique la regla de la cadena para hallar:

1) $\frac{dz}{dt}$ donde $z = \operatorname{sen} x \cos y$, $x = 2t$, $y = 5\sqrt{t}$;

2) $\frac{dz}{dt}$, donde $z = x\ln(x + 10y)$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$,

3) $\dfrac{dw}{dt}$, donde $w = xe^{\frac{y}{z}}$, $x = t^2$, $y = 8 - t$, $z = 8 + 9t$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, donde $z = x^2 + 10xy + y^2$, $x = 5s + 6t$, $y = st$;

5) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, donde $z = \dfrac{x}{y}$, $x = 3se^t$, $y = 5 + se^{-t}$;

6) $\dfrac{\partial u}{\partial p}$, donde $u = \dfrac{x+y}{y+z}$, $x = p + 6r + 3t$, $y = p - 6r + 3t$, $z = p + 6r - 3t$.

Ejercicio 4.7. Si $z = f(x, y)$, donde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

Ejercicio 4.8. Si $z = f(x, y)$, encuentre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

en términos de las coordenadas polares (r, θ).

Ejercicio 4.9. Demostrar que la ecuación $xyz = \ln(x + y^2 - 2z)$ define una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(3, 0)$ tal que $f(3, 0) = 1$. Luego hallar las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 0)$.

Ejercicio 4.10. Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ define una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(1, 1)$, tal que $f(1, 1) = 1$. Luego hallar todas las derivadas parciales del primero y segundo orden en el punto $(1, 1)$.

Ejercicio 4.11. Utilice la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ si tenemos que

$$\cos(x - 3y) = xe^{2y}.$$

Ejercicio 4.12. Use la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$xe^{6y} + 7yz + ze^{4x} = 0.$$

Ejercicio 4.13. Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección del vector $\vec{v}$ donde

1) $f(x, y) = -8 + 8x\sqrt{y}$, $P(1, 1)$ y $\vec{v} = (-4, 3)$;

2) $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $P(1,3)$ y $\vec{v} = (8,6)$;

3) $f(x, y, z) = x \tan \frac{y}{z}$, $P(9,7,7)$ y $\vec{v} = -5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Ejercicio 4.14. Encuentre la derivada direccional de f en el punto P en la dirección que indica el ángulo θ.

1)
$$f(x, y) = xe^{-9y}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad P = (-2, 0).$$

2)
$$f(x, y) = \sqrt{3x - 2y}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}, P = (10, 7).$$

Ejercicio 4.15. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas. Considere los puntos $A(2, 1)$, $B(6, 1)$, $C(2, 6)$ y $D(7, 13)$. La derivada direccional en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 10 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 6.

Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

Ejercicio 4.16. Determine el gradiente de f donde

1) $f(x, y) = 2xy^5 - 10x^4y$;

2) $f(x, y, z) = \text{sen}\, x \cos y - x + y - 2z$.

Ejercicio 4.17. Evalúe el gradiente de f en el punto P donde

1) $f(x, y) = xy + 2y^2$ y $P(-1, 2)$,

2) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$ y $P(1, -2, -1)$.

Ejercicio 4.18. Encuentre la dirección en la que f crece más rápido en el punto A donde

1) $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ y $A(0, 1)$;

2) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ y $A(1, -1, 1)$.

Ejercicio 4.19. Encuentre la dirección en la que f decrece más rápido en el punto A donde

1) $f(x, y) = x^4y - x^3y^2$ y $A(1, -1)$,

2) $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ y $A(3, 2, 1)$.

Ejercicio 4.20. Sea

$$f(x, y) = x^2 + 6y^2.$$

Determine el vector gradiente $\nabla f(3, 4)$ y con éste encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 105$ en el punto $(3, 4)$.

Ejercicio 4.21. Encuentre la ecuación de la recta normal en el punto $(6, 2, 9)$ a la superficie dada por la ecuación

$$2x^2 + 7y^2 + 7z^2 = 667.$$

Ejercicio 4.22. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie

$$z + 7 = xe^y \cos z$$

en el punto $(7, 0, 0)$.

Ejercicio 4.23. Considere las funciones $f(x, y) = x^3 + y^2 - 1$ y $g(x, y) = x - y^2 - 1$.

1) Dibujar las curvas de nivel de f y de g que pasan por el punto $(2, 1)$.

2) Usar los vectores gradientes para hallar el ángulo de intersección entre las curvas de nivel anteriores.

Ejercicio 4.24. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $3x^2 + y^2 + z^2 = 32$ en el punto $(-1, 2, 5)$.

Ejercicio 4.25. Considere la función $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$.

1) Dibujar curvas de nivel $f = c$, para $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ en el dominio $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

2) Hallar $D_{\vec{u}} f(1, 1)$, donde $\vec{u}$ es el vector unitario que forma un ángulo de $3\pi/2$ con el semieje positivo x. En el dibujo anterior dibuje el vector $\vec{u}$ en el punto $(1, 1)$. ¿Este vector apunta hacia donde la función crece o decrece?

3) Hallar $D_{\vec{u}} f(1, 1)$, donde $\vec{u}$ es el vector unitario que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje positivo x. En el dibujo anterior dibuje el vector en el punto $(1, 1)$. ¿Este vector apunta hacia donde la función crece o decrece?

4) Hallar una dirección tal que la función f en el punto $(1, 1)$ ni crezca ni decrezca.

5) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(1, 1)$ en este punto.

6) Hallar la ecuación de la recta normal a la curva de nivel que pasa por el punto $(1, 1)$ en este punto.

7) En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección la función crece lo más rápido posible?

8) En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección la función decrece lo más rápido posible?

Ejercicio 4.26. Considere la función $f(x, y, z) = 4 + z - x^2 - y^2$.

1) Dibujar las superficies de nivel $f = c$, para $c = 0, 2, 4$ en $\mathbb{R}^3$.

2) Hallar $D_{\vec{u}} f(1, 1, 2)$, donde $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. En el dibujo anterior dibuje el vector $\vec{u}$ en el punto $(1, 1, 2)$. ¿Este vector apunta hacia donde la función crece o decrece?

3) Hallar $D_{\vec{u}} f(1, 1, 2)$, donde $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. En el dibujo anterior dibuje el vector $\vec{u}$ en el punto $(1, 1, 2)$. ¿Este vector apunta hacia donde la función crece o decrece?

4) Hallar una dirección tal que la función f en el punto $(1, 1, 2)$ ni crezca ni decrezca.

5) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel que pasa por el punto $(1, 1, 2)$ en este punto.

6) Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie de nivel que pasa por el punto $(1, 1, 2)$ en este punto.

7) En el punto $(1, 1, 2)$, ¿en qué dirección la función f crece lo más rápido posible?

8) En el punto $(1, 1, 2)$, ¿en qué dirección la función f decrece lo más rápido posible?

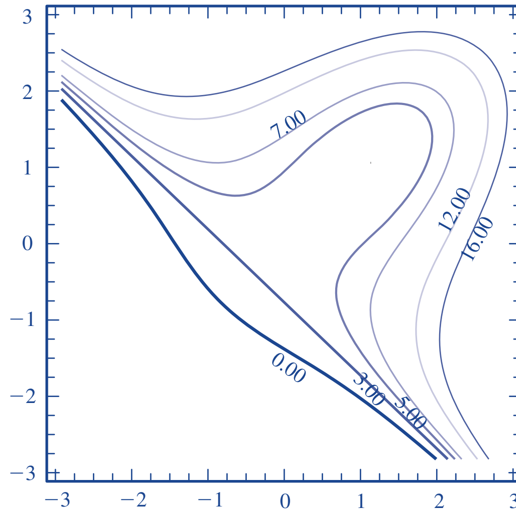


Figura 4.6. Dibuje el vector gradiente en el punto (2, 1)

Ejercicio 4.27. De la función $f(x, y)$ se conocen sus curvas de nivel (v. figura 4.6). En el punto indicado (2, 1) dibuje:

1) el vector que indica hacia dónde f crece lo más rápido posible en P;

2) el vector que indica hacia dónde f decrece lo más rápido posible en P;

3) un vector que indica hacia dónde f ni crece ni decrece en P;

4) el vector gradiente de f en P.

Ejercicio 4.28. La forma de la piedra El Peñol, cerca de Medellín, tiene la forma del paraboloide elíptico invertido cuya altura podemos modelar aproximadamente por $f(x, y) = 400 - 0.03x^2 - 0.25y^2$ metros. Un alpinista profesional parado al borde de la montaña en (0, 40, 0) quiere trazar la ruta de subida hasta la cima de mayor dificultad, comenzando en este punto. Dibujar la superficie y sobre ella la ruta que quiere el alpinista.

Ejercicio 4.29. La foto del mapa topográfico en la figura 4.7 muestra las curvas de nivel de una parte de la frontera de los departamentos del Valle del Cauca y del Chocó. Ubique el cerro Pan de Azúcar, el río Calima, el río Frío, la represa de Calima que está en la altura 1500 metros sobre el nivel del mar. Los lados de los cuadrantes en el mapa tienen una longitud de 40 kilómetros.

1) ¿Dónde nace y dónde desemboca el río Calima, entre los 1500 y 4000 metros sobre el nivel del mar?

2) Más precisamente, ¿entre qué alturas aproximadamente se encuentra el río Calima, antes de entrar al embalse?

3) ¿Hay algún río que en algún punto que no sigue la dirección "menos el gradiente"? Es decir, ¿hay algún río que no intersecta una curva de nivel mostrada cuya intersección con ella no sea un ángulo recto aproximadamente?

4) Dé un estimativo de la pendiente de la montaña en el pueblo de Darién en la dirección occidental.



Figura 4.7. Mapa topográfico Calima (Valle del Cauca)

Ejercicio 4.30. La presión de un mol de gas ideal se incrementa a razón de 0.57 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.24 K/s. Utilice la ecuación

$$P = 8.31\frac{T}{V},$$

para encontrar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 90 kPa y la temperatura es de 230 K.

Ejercicio 4.31. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un bicho se arrastra de tal modo que su posición despúes de t segundos está definida por

$$x = \sqrt{1 + t}, \quad y = 7 + \frac{1}{14}t,$$

donde x y y se miden en centímetros. La función de temperatura cumple con $T_x = 4$ y $T_y = 15$ para $t = 15$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura en la trayectoria del bicho después de 15 segundos?

Ejercicio 4.32. El radio de un cono circular recto se incrementa a una razón de 2.6 pulg/s, mientras su altura disminuye a razón de 5 in/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es de 115 pulgadas y la altura es de 115 pulgadas?

Ejercicio 4.33. La longitud l, ancho w y altura h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante las dimensiones son $l = 8$ m, $w = h = 3$ m, y l y w se incrementan a razón de 7 m/s, mientras que h disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante la razón a la que cambia el área superficial de la caja.

Ejercicio 4.34. La temperatura T en un punto de una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia del punto al centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $P(1, 2, 2)$ es 180°. Determine la razón de cambio de T en el punto P en la dirección hacia el punto (6, 5, 6).

Ejercicio 4.35. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por

$$V(x, y, z) = 7x^2 - 4xy + 9xyz.$$

Determine la tasa de cambio del potencial en el punto $P(-10, 10, 5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$.

CAPÍTULO 5

Optimización

5.1 Extremos libres

5.1.1 Extremos locales

Definición 5.1. Sea $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ una función real de varias variables definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene:

1) un *máximo local estricto* en $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, si existe una vecindad de $\vec{a}$, $V(\vec{a})$, tal que $f(\vec{a}) > f(\vec{x})$, para todo $\vec{x} \in V(\vec{a}) \cap D$ $(x \neq \vec{a})$.

2) un *máximo local no estricto* en $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, si existe una vecindad de $\vec{a}$, $V(\vec{a})$, tal que $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V(\vec{a}) \cap D$.

3) un *mínimo local estricto* en $\vec{a} = (a_1; \ldots; a_n) \in D$, si existe una vecindad de $\vec{a}$, $V(\vec{a})$, tal que $f(\vec{a}) < f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V(\vec{a}) \cap D$ $(x \neq \vec{a})$.

4) un *mínimo local no estricto* en $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, si existe una vecindad de $\vec{a}$, $V(\vec{a})$, tal que $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V(\vec{a}) \cap D$.

Ejemplo 5.1. La función $f(x, y) = [1 - x^2 - y^2]$ (parte entera)[1] posee un valor máximo no estricto de 1 en el punto (0, 0). Esta función no es continua.

Ejemplo 5.2. La función $f(x, y) = 1 - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ posee un valor máximo estricto de 1 en el punto (0, 0). El dominio de esta función es el primer cuadrante. Observe que para una vecindad V (disco abierto) en el punto (0, 0) V, su intersección con D es un cuarto de círculo centrado en el punto (0, 0) y radio ε en el primer cuadrante (v. figura 5.1). ♦

Ejemplo 5.3. Consideremos la función $f(x, y) = (x + y - 2)^2$. El gradiente de f en cada punto (x, y) es $\nabla f(x, y) = 2(x + y - 2, x + y - 2)$ y se anula en todos los puntos sobre la recta ℓ: $x + y - 2 = 0$. Las curvas de nivel son rectas paralelas a ℓ. Si dibujamos el vector gradiente ∇f en cada punto que no esté en la recta ℓ, éste tiene

[1]La función *parte entera* se define como: $[x] = m$ si y sólo si $m \leq x < m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$.

dirección perpendicular a las curvas de nivel y apunta en sentido contrario a la recta ℓ. Por lo tanto la función f posee un mínimo no estricto en todos los puntos de la recta ℓ. El valor del mínimo es cero (v. figura 5.2).

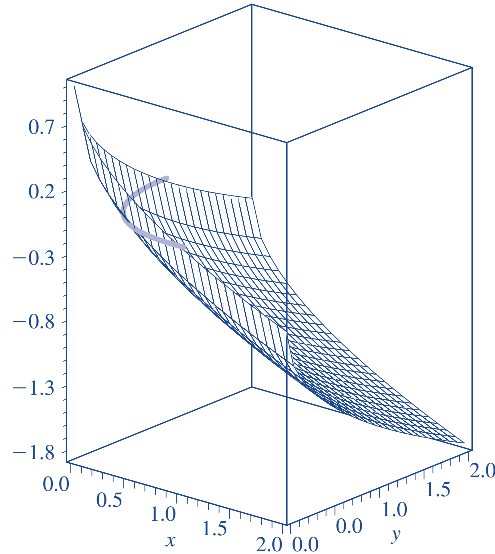


Figura 5.1. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x} - \sqrt{y}$

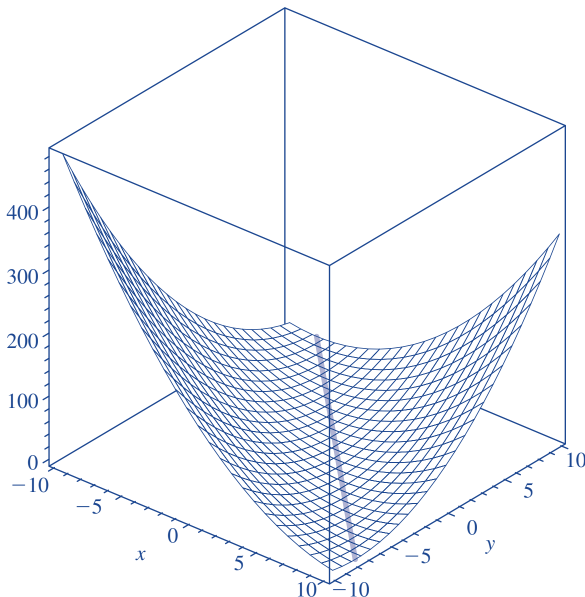


Figura 5.2. $f(x, y) = (x + y - 2)^2$

5.1.2 Puntos críticos

En los ejemplos anteriores obtuvimos los valores extremos por simple inspección, teniendo como herramientas la gráfica de f y las gráficas de sus curvas de nivel. Ahora quisiéramos tener otra herramienta. Esta herramienta va a ser analítica y se aplicará para funciones que posean todas sus segundas derivadas parciales continuas. Supongamos que las funciones reales f en varias variables que consideramos en esta sección poseen todas sus segundas derivadas parciales $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ continuas en algún subconjunto abierto Ω de su dominio D.

Definición 5.2. Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función real con segundas derivadas parciales continuas en Ω, donde Ω es un subconjunto abierto del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ se llama *punto crítico* de f si el gradiente se anula en este punto, $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Teorema 5.1 (condición necesaria). Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función real con segundas derivadas parciales continuas en Ω, donde Ω es un subconjunto abierto del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{a} \in \Omega$ un punto. Si f posee un extremo local en $\vec{a}$, entonces $\vec{a}$ es un punto crítico, es decir $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Ejemplo 5.4. La función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ con segundas derivadas parciales continuas en Ω, tiene un máximo local en $\vec{a} = (0, 0)$, y este valor es 4. Por el teorema 5.1, el gradiente se debe anular en este punto. Efectivamente, $\nabla f(0, 0) = (-2x, -2y)\big|_{(0,0)} = (0, 0)$ (v. figura 5.3).

Ejemplo 5.5. La condición del teorema 5.1 es necesaria pero no es suficiente, es decir, para que una función que cumpla las hipótesis del teorema tenga un extremo local en $\vec{a}$ es necesario que el gradiente se anule en $\vec{a}$ pero no es suficiente. Por ejemplo la función $f(x, y) = xy$, en el punto $\vec{a} = (0, 0)$ se anula su gradiente, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, sin embargo en $\vec{a} = (0, 0)$ la función f no tiene ningún extremo local (máximo o mínimo). La gráfica de f es un paraboloide hiperbólico.

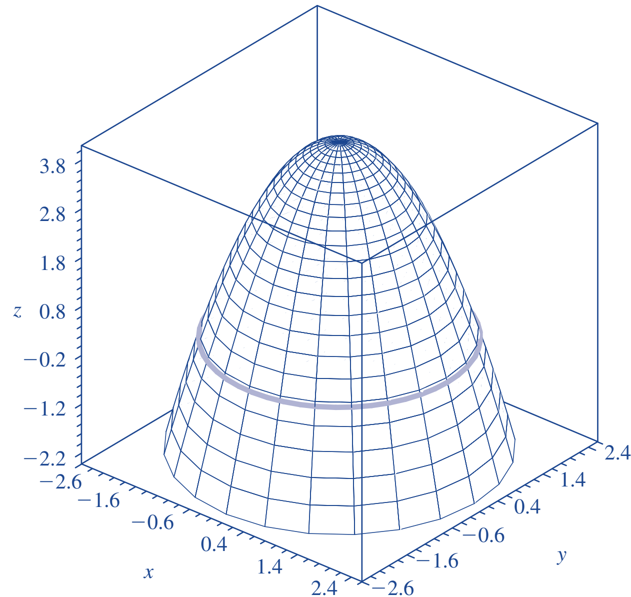


Figura 5.3. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Teorema 5.2 (condición suficiente). Sean $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real con segundas derivadas parciales continuas en Ω, donde Ω es un subconjunto abierto del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ un punto crítico. Denotemos por $\Delta_k(\vec{a})$ el determinante de la matriz cuadrada $k \times k$, para $1 \leq k \leq, n$,

$$\Delta_k(\vec{a}) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_1x_k}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_kx_1}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_kx_k}(\vec{a}) \end{vmatrix}_{k\times k}, \quad \text{donde} \quad f_{x_ix_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(\vec{a}). \tag{5.1}$$

- Si $\Delta_k(\vec{a}) > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, entonces f posee un mínimo local estricto en a.
- Si $(-1)^k \Delta_k(\vec{a}) > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, entonces f posee un máximo local estricto en a.

Nota 5.1. El teorema 5.2 se conoce también con el nombre de *criterio de la segunda derivada.*

Veamos este teorema para cuando $n = 2$ y cuando $n = 3$.

1) **Caso** $n = 2$: Sean $f(x, y)$ una función de clase C^2, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ un punto crítico y los determinantes[2] $\Delta_k(\vec{a})$:

$$\Delta_1(\vec{a}) = \left| f_{xx}(\vec{a}) \right| = f_{xx}(\vec{a});$$

$$\Delta_2(\vec{a}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\vec{a}) & f_{xy}(\vec{a}) \\ f_{yx}(\vec{a}) & f_{yy}(\vec{a}) \end{vmatrix} = f_{xx}(\vec{a}) f_{yy}(\vec{a}) - (f_{xy}(\vec{a})).^2 \tag{5.2}$$

a) Si $\Delta_1(\vec{a}) > 0$ y $\Delta_2(\vec{a}) > 0$, entonces f posee un mínimo local estricto en $\vec{a}$.

b) Si $\Delta_1(\vec{a}) < 0$ y $\Delta_2(\vec{a}) > 0$, entonces f posee un máximo local estricto en $\vec{a}$.

c) Si $\Delta_2(\vec{a}) < 0$, entonces f posee un punto de silla en $\vec{a}$.

d) Si $\Delta_2(\vec{a}) = 0$, entonces no se decide respecto a f con este criterio. Puede haber un extremo local, un punto de silla o ninguno de los anteriores. En este caso, cuando $\Delta_2(\vec{a}) = 0$ debemos usar otra herramienta, por ejemplo la gráfica de la función o del gradiente y curvas de nivel, por ejemplo considere la función del ejemplo 5.3.

[2] El determinante de una matriz 1×1 es el único número de sus entradas. Por el teorema de Clairaut las segundas derivadas parciales cruzadas son iguales.

Ejemplo 5.6. Estudiemos los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}. \tag{5.3}$$

Esta función tiene como dominio todo el plano excepto los puntos sobre cada uno de los ejes coordenados. Esta función tiene 4 puntos críticos y se encuentran resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas dado por

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (0, 0) &\Rightarrow 2x - \frac{2}{x^3 y^2} = 0; \quad 2y - \frac{2}{x^2 y^3} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{a}_1 = (1, 1), \vec{a}_2 = (-1, 1), \vec{a}_3 = (-1, -1), \vec{a}_4 = (1, -1). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada encontramos que $\Delta_1(\vec{a}_i) = 8 > 0$ y que $\Delta_2(\vec{a}_i) = 48 > 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Por lo tanto en los cuatro puntos críticos la función tiene un mínimo local cuyo valor es igual a 3. ♦

Ejemplo 5.7. La función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \tag{5.5}$$

tiene como único punto crítico el punto $\vec{a} = (0, 0)$ en todo su dominio el cual es el plano real. El criterio de la segunda derivada no decide en este caso pues $\Delta_1(\vec{a}) = 0$ y $\Delta_2(\vec{a}) = 0$. Dado que la función es positiva en todo su dominio excepto en el punto $(0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$, por lo tanto en $(0, 0)$ hay un mínimo local y su valor es cero. La función no tiene otros valores extremos pues sólo tiene un punto crítico.

Otro método es estudiar su gradiente y curvas de nivel. Dibujando sus curvas de nivel y el gradiente en un mismo plano podemos deducir que la función tiene un mínimo en $\vec{a} = (0, 0)$ y este valor es cero (v. figura 5.4).

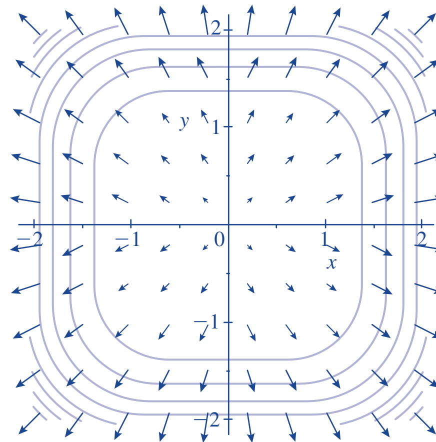


Figura 5.4. Curvas de nivel y gradiente de $f(x, y) = x^4 + y^4$

2) **Caso** $n = 3$: Sean $f(x, y, z)$ una función de clase C^2, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un punto crítico y los determinantes $\Delta_1(\vec{a})$, $\Delta_2(\vec{a})$ definidos en (5.2), y

$$\Delta_3(\vec{a}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\vec{a}) & f_{xy}(\vec{a}) & f_{xz}(\vec{a}) \\ f_{yx}(\vec{a}) & f_{yy}(\vec{a}) & f_{yz}(\vec{a}) \\ f_{zx}(\vec{a}) & f_{zy}(\vec{a}) & f_{zz}(\vec{a}) \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

a) Si $\Delta_1(\vec{a}) > 0$, $\Delta_2(\vec{a}) > 0$ y $\Delta_3(\vec{a}) > 0$, enonces f posee un mínimo local estricto en $\vec{a}$.

b) Si $\Delta_1(\vec{a}) < 0$, $\Delta_2(\vec{a}) > 0$ y $\Delta_3(\vec{a}) < 0$, entonces f posee un máximo local estricto en $\vec{a}$.

Ejemplo 5.8

(**ejercicio resuelto**). Hallar los puntos críticos de la función y analizar si existen o no valores extremos de f:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz. \tag{5.7}$$

Los puntos críticos los encontramos resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} 1)\ f_x = 2x + z = 0 \\ 2)\ f_y = 2y = 0 \\ 3)\ f_z = 2z + x = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Por lo tanto $y = 0$ y de las ecuaciones (1) y (3) obtenemos que $x = z = 0$. Por lo tanto, el único punto crítico es (0, 0, 0). Por otro lado tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(0, 0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Los determinantes $\Delta_1(0, 0, 0) = 2 > 0$, $\Delta_2(0, 0, 0) = 4 > 0$, y $\Delta_3(0, 0, 0) = 6 > 0$. Por lo tanto, el criterio de la segunda derivada nos afirma que en (0, 0, 0) hay un mínimo local. El valor del mínimo es cero, $f(0, 0, 0) = 0$. ♦

Ejemplo 5.9

(**ejercicio resuelto**). Dada la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}z^2 + xyz, \tag{5.10}$$

encontrar los puntos críticos, analizar su tipo y encontrar los extremos locales de f en esos puntos, si es el caso.

Los puntos críticos los encontramos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} (1)\ f_x = x^2 + yz = 0 \\ (2)\ f_y = y^2 + xz = 0 \\ (3)\ f_z = z + xy = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Este sistema 3×3 (tres ecuaciones con tres incógnitas) lo podemos resolver reduciendo el sistema a un sistema 2×2, por ejemplo: $(1) \cdot x - (2) \cdot y$, eliminamos la variable z y obtenemos la ecuación (4). Por otro lado: $(1) - (3) \cdot y$, eliminamos la misma variable z y obtenemos la ecuación (5). Hemos reducido el sistema a 2×2:

$$\begin{cases} (4) \quad x^3 - y^3 = 0 \\ (5) \quad x^2 - xy^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4) \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \\ (5) \quad x^2 - xy^2 = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Lo cual implica de (4) que $x = y$ y sustituyendo en (5) obtenemos $x^2(1 - x) = 0$. Por lo tanto tenemos dos puntos críticos: $\vec{a}_1 = (0, 0, 0)$ y $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$. Usando el criterio de segunda derivada tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & z & y \\ z & 2y & x \\ y & x & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(0\,,0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.13}$$

Los determinantes $\Delta_\kappa(\vec{a}_1) = 0$, para $k = 1, 2, 3$. Por lo tanto, el criterio de la segunda derivada no nos da ninguna información de f alrededor de este punto, entonces tenemos que aplicar otros métodos. Por ejemplo, observamos que $f(x, 0, 0) = x^3/3$ que implica que $f > 0$ para los puntos $(x, 0, 0)$ con $x > 0$ y $f < 0$ para los puntos $(x, 0, 0)$ con $x < 0$. Entonces, el punto $(0, 0, 0)$ no es un extremo local.

Por otro lado:

$$\Delta(\vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1(\vec{a}_2) = f_{xx}(\vec{a}_2) = 2 > 0, \\ \Delta_2(\vec{a}_2) = f_{xx}(\vec{a}_2) f_{yy}(\vec{a}_2) - (f_{xy}(\vec{a}_2))^2 = (2)(2) - (-1)(-1) = 3 > 0, \\ \Delta_3(\vec{a}_2) = -3 < 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

A pesar de que los determinantes $\Delta_\kappa(\vec{a}_1) \neq 0$, el criterio de la segunda derivada tampoco nos brinda ninguna información de f alrededor del punto $(1, 1, -1)$ pues no satisface el orden de los signos en la sucesión de los determinantes para que haya un extremo local. El hecho es que el punto $\vec{a}_2$ es un punto de silla multidimensional. ♦

5.2 Extremos restringidos

En la sección anterior estudiamos cómo podemos encontrar los extremos de una función f en su dominio D. En esta sección estudiaremos cómo podemos encontrar los extremos de una función cuando no consideramos todo su dominio sino parte de él. Es decir tomaremos un subconjunto A de D y encontraremos los extremos de f en A. El subconjunto A puede ser una línea, un conjunto cerrado, etc. Veremos el caso cuando el conjunto A está determinado por un sistema de ecuaciones.

Teorema 5.3 (método de los multiplicadores de Lagrange). Sean $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^k$ dos funciones con segundas derivadas parciales continuas en Ω, donde Ω es un subconjunto abierto del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sean $g_1, \ldots, g_k$ las componentes de g y el conjunto $S = \{\vec{x} \in D \mid g_i(\vec{x}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots k\}$. Para que en un punto $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ haya un extremo de f restringido es necesario que existan escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ que junto con $\vec{a}$ satisfagan el sistema de ecuaciones derivadas parciales:

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x}) + \cdots + \lambda_\kappa \nabla g_\kappa(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_k(\vec{x}) = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

La función f en ciertas aplicaciones es conocida como *función objetivo*, la función g como la *función restricción* y la ecuación $g = \vec{0}$ como *restricción*.

Ejemplo 5.10 (**ejercicio resuelto**). Hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = xy$ sobre la recta $x + 2y = 4$. Entonces la función objetivo es $f(x, y, z) = xy$ y la función restricción es $g(x, y) = x + 2y - 4$. El sistema (5.15) se escribe como

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g, \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y, x) = \lambda(1, 2) = (\lambda, 2\lambda) \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

Sustituimos $x = 2\lambda$ y $y = \lambda$ en $x + 2y - 4 = 0$, entonces $4\lambda - 4 = 0$ y $\lambda = 1$. Luego $x = 2\lambda = 2$, $y = \lambda = 1$. Entonces el punto $(2, 1)$ es un extremo de la función $f(x, y) = xy$ restringido a la recta $x + 2y = 4$, y el valor de f es $f(2, 1) = 2$.

Si tomamos otro punto de la recta, por ejemplo (4, 0), el valor en este punto es $f(4, 0) = 0 < 2$. Por lo tanto la función $f(x, y) = xy$ tiene máximo restringido igual a 2 y lo obtiene en el punto (2, 1). ♦

Ejemplo 5.11 (**ejercicio resuelto**). Hallar los valores extremos de la función

$$f(x, y, z) = xy + yz, \tag{5.17}$$

restringiendo su dominio a la curva intersección de las superficies:

$$\begin{cases} y = x^2 - z^2 & \text{(paraboloide hiperbólico),} \\ x + y + z = 3 & \text{(plano).} \end{cases} \tag{5.18}$$

Sean $g_1(x, y, z) = x^2 - z^2 - y$, $g_2(x, y, z) = x + y + z - 3$. En este caso tomaremos como función objetivo $f(x, y, z) = xy + yz$ y como función restricción $g(x, y, z) = (x^2 - z^2 - y, x + y + z - 3)$. El sistema (5.15) tiene la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x}), \\ g_1(\vec{x}) = 0, \\ g_2(\vec{x}) = 0, \end{cases} \tag{5.19}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} 1) \quad y = \lambda_1(2x) + \lambda_2(1) \\ 2) \quad x + z = \lambda_1(-1) + \lambda_2(1) \\ 3) \quad y = \lambda_1(-2z) + \lambda_2(1) \\ 4) \quad g_1(x, y, z) = x^2 - z^2 - y = 0, \\ 5) \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0, \end{cases} \tag{5.20}$$

el cual es un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. Reduzcamos el sistema de 5×5 a un sistema 4×4 eliminando λ_2. Para esto restamos (1) y (2), luego (1) y (3):

$$\begin{cases} 1) \quad y = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2) \quad x + z = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3) \quad y = -2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ 4) \quad x^2 - z^2 - y = 0 \\ 5) \quad x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \quad y - x - z = (2x + 1)\lambda_1 \\ 2 \quad 0 = 2(x + z)\lambda_1 \\ 3) \quad x^2 - z^2 - y = 0 \\ 4) \quad x + y + z = 3 \end{cases} \tag{5.21}$$

Después reducimos el resultado a un sistema 3×3 y así sucesivamente. Si $x + z = 0$, entonces en (3) y (4) del segundo sistema en (5.20) tendríamos una con-

tradicción $0 = 3$. Por lo tanto $x + z \neq 0$. Por lo tanto $\lambda_1 = 0$. Luego en el sistema resuelto eliminamos sumando y restando estas tres ecuaciones adecuadamente:

$$\begin{cases} 1) \quad y - x - z = 0 \\ 2) \quad x^2 - z^2 - y = 0 \\ 3) \quad x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \quad -x - z + x^2 - z^2 = 0 \\ 2) \quad -2x - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \quad x - z = 1 \\ 2) \quad x + z = 3/2. \end{cases} \tag{5.22}$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es: $x = 5/4$, $y = 3/2$, $z = 1/4$, $\lambda_1 = 0$, y $\lambda_2 = 6/4 = 3/2$.

El valor extremo es $f(5/4, 3/2, 1/4) = 9/4$. Dado que hay un solo punto para analizar, tomamos otro punto que pertenezca a la restricción, por ejemplo $(3/2, 0, 3/2)$ y vemos que $f(3/2, 0, 3/2) = 0 < 9/4$. Por lo tanto la función f tiene máximo restringido igual a $9/4$ y lo obtiene en $(5/4, 3/2, 1/4)$. ♦

Ejemplo 5.12 (**ejercicio resuelto**). Encontrar la mínima distancia del origen a la superficie $x^2 - (y - z)^2 = 1$.

Usaremos el método de multiplicadores de Lagrange. Nos piden minimizar la distancia de un punto (x, y, z) en el espacio $3D$ al origen $(0, 0, 0)$, es decir minimizar: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde (x, y, z) pertenece a la superficie $x^2 - (y - z)^2 = 1$.

Consideremos la función distancia al cuadrado:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Estas dos funciones d y f tienen los mismos puntos críticos, por lo tanto trabajaremos con f y así evitamos la raíz cuadrada. En tal caso, la función objetivo es f y la función restricción es:

$$g(x, y, z) = x^2 - (y - z)^2 - 1.$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange para una sola restricción tenemos:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g, \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x, \\ 2y = -2\lambda(y - z), \\ 2z = 2\lambda(y - z), \\ x^2 - (y - z)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \quad x = \lambda x, \\ 2) \quad y = -\lambda(y - z), \\ 3) \quad z = \lambda(y - z), \\ 4) \quad x^2 - (y - z)^2 = 1. \end{cases}$$

Debemos resolver este sistema no lineal. De (4) obtenemos que $x^2 = 1 + (y - z)^2 > 1$, entonces $x \neq 0$. Luego (1) implica que $\lambda = 1$. Reemplazando este valor en (2) y (3) obtenemos que $2y = z$ y $2z = y$ respectivamente. De estas dos últimas ecuaciones obtenemos que $4z = z$, lo cual implica necesariamente que

$z = 0$ y por lo tanto $y = 0$. Para hallar parte de la solución reemplazamos en (4) y obtenemos que la solución del sistema es $(\pm 1, 0, 0)$, $\lambda = 1$, lo cual implica que $d(\pm 1, 0, 0) = 1$. Por lo tanto la distancia mínima de la superficie al origen es igual a 1. ♦

Si queremos hallar los valores extremos de una función sobre un conjunto D que es una región con frontera, por ejemplo D es un círculo, entonces debemos dividir nuestro análisis en dos casos, a saber, encontrar los extremos en la parte interior de D (método extremos libres), luego encontrar los extremos en la frontera de D (método multiplicadores de Lagrange) y finalmente comparar y escoger el mayor y menor valor que toma la función en D.

Ejemplo 5.13

(**ejercicio resuelto**). Encuentre los valores extremos de la función $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 5$ en el círculo $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Para resolver este problema tenemos que encontrar los extremos locales de la función $f(x, y)$ y encontrar los extremos de la función restringidos a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y después compararlos.

El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = (4x - 4, 6y),$$

entonces el punto crítico es $A(1, 0)$ y $f(A) = f(1, 0) = 3$ (usando el criterio de la segunda derivada podemos concluir que $A(1, 0)$ es el punto mínimo, pero no lo necesitamos).

Luego hallamos los extremos restringidos de la función $f(x, y)$ usando el método de multiplicadores de Lagrange: la función $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 5$ es la función objetivo y la función $g(x, y) = x^2 + y^2 - 16$ es la función restricción. Entonces, el sistema es

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4x - 4, 6y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $x = -4$, $y = 0$, $\lambda = 5/2$, $x = 4$, $y = 0$, $\lambda = 3/2$, $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$, $\lambda = 3$, $x = -2$, $y = -2\sqrt{3}$, $\lambda = 3$. Por lo tanto, los puntos donde los extremos restringidos podrían estar son $B(-4, 0)$, $C(4, 0)$, $D(-2, 2\sqrt{3})$, $E(-2, -2\sqrt{3})$.

Calculamos: $f(B) = 53$, $f(C) = 21$, $f(D) = f(E) = 57$ y comparamos estos valores con $f(A) = 3$. Es importante verificar que el punto A pertenece al círculo D, es así porque $1^2 + 0^2 < 16$. Entonces podemos concluir que el valor máximo de la función $f(x, y)$ en el círculo D es $f_{\text{máx}} = f(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 57$ y el valor mínimo es $f_{\text{mín}} = f(1, 0) = 3$. ♦

Ejemplo 5.14. Un rayo de luz atraviesa con rapidez constante ν_1 un medio uniforme M_1 y con rapidez constante ν_2 otro medio M_2. Se puede pensar que los medios son aire y agua. Si el rayo atraviesa el aire y luego entra al agua, el rayo es refractado como muestra la figura 5.5. Entonces, el principio de Fermat del tiempo mínimo nos dice que el rayo cambia su trayectoria al pasar de un medio al otro por el punto P, en la frontera entre los dos medios, formando con la normal a la superficie un ángulo de incidencia θ_1 y un ángulo refractado θ_2. Supongamos que el rayo de luz viaja desde el punto A hasta el punto B, los cuales están separados horizontalmente una distancia d y verticalmente una distancia $a + b$ como lo indica la figura 5.5.

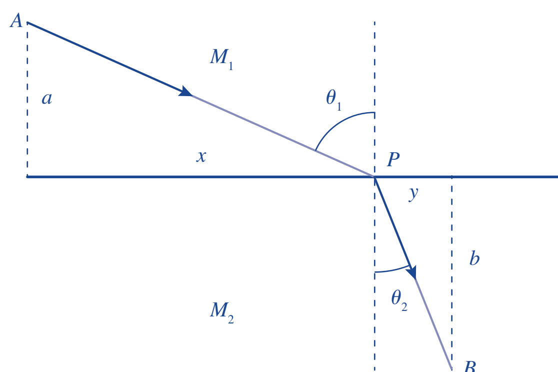


Figura 5.5. Ley de Snell

1) Basándonos en el hecho de que espacio es igual a "velocidad" (realmente es la rapidez) por tiempo, $e = vt$, el tiempo total que toma el rayo para ir desde el punto A hasta el punto B pasando por P es:

$$t_{Total} = t_1 + t_2 = t(x, y) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\nu_1} + \frac{\sqrt{b^2 + y^2}}{\nu_2}. \qquad (5.23)$$

2) Observamos que el ángulo en A es igual a θ_1 y el ángulo en B es igual a θ_2 por ser ángulos internos alternos respectivamente. Usando el método de multiplicadores de Lagrange para establecer el tiempo total mínimo (principio de Fermat) para ir de A a B con la restricción $x + y = d$, tenemos:

$$\begin{cases} t(x,y) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+y^2}}{v_2}. \\ g(x,y) = x+y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla t(x,y) = \lambda \nabla g, \\ g(x,y) = x+y = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_x = \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \lambda\,, \\ t_y = \dfrac{y}{v_2\sqrt{b^2+y^2}} = \lambda\,, \\ g(x,y) = x+y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}\,, \\ x+y = d. \end{cases} \tag{5.24}$$

De lo cual se deduce la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$



Ejemplo 5.15. Se quiere encerrar un terreno de forma rectangular con uno de sus lados sobre una carretera recta con una cuerda de 100 m de largo. El terreno estará demarcado por la carretera y los otros tres lados por la cuerda (v. figura 5.6). Hallar las dimensiones del terreno de mayor área que puede encerrarse de esta manera.

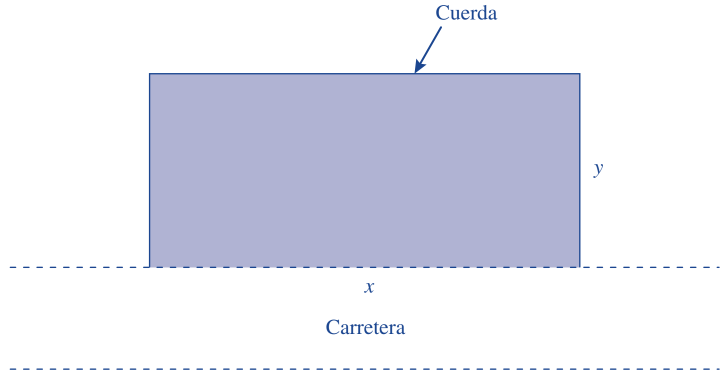


Figura 5.6. Ejemplo 5.15

La función objetivo o función a optimizar, f, es el área del terreno,

$$f(x,y) = xy.$$

La función restricción g es

$$g(x,y) = x + 2y - 100 = 0.$$

Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange tenemos:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda, \\ x = 2\lambda, \\ x + 2y = 100, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50, \\ y = 25, \\ \lambda = 25, \end{cases}$$

$$f(50, 25) = 1250.$$

Las dimensiones del terreno que puede encerrarse con una cuerda de 100 m son 50 m de largo por 25 m de ancho y tiene un área de 1250 m^2. Supongamos ahora que la cuerda mide 101 m. Repitiendo el procedimiento tenemos:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda, \\ x = 2\lambda, \\ x + 2y = 101, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{101}{2} \approx 50,5 \\ y = \dfrac{101}{4} \approx 25,25 \\ \lambda = \dfrac{101}{4} \approx 25,25 \end{cases}$$

$$f(50,5, 25,25) \approx 1275.$$

Al repetir el proceso con una cuerda de 99 m de longitud encerramos un terreno de área aproximada 1225 m^2. Es decir, si la cuerda tiene un metro más o un metro menos de largo podríamos encerrar un terreno con área máxima igual a $1225 \pm \lambda$ m^2.

5.3 Ejercicios del capítulo 5

Ejercicios recomendados: 1, 2, 6, 11, 13, 16, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 19, 20, 24.

Ejercicio 5.1. Encuentre los puntos críticos de la función

1)

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} - 14x^2 + 7y^2 + 48x + 5.$$

2)

$$f(x, y) = 10 + 148xy + 74x^2 + 67^2 y + \frac{y^4}{4}.$$

Ejercicio 5.2. Para la función f dada: hallar los puntos críticos, analizar si en ellos f alcanza un extremo local, es decir estudiar si en los puntos críticos hay o no mínimos o máximos locales de f, para los casos que existan, hallar estos valores.

1) $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.

2) $f(x, y) = 3ye^x - e^{3x} - y^3$.

3) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy + 5$.

4) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy - x - 2y + 2$.

5) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 3$.

6) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

7) $f(x, y) = e^{-x^2 + y^2}$.

8) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{x^2 - y^2}$.

9) $f(x, y) = 12x^2 + 12y^2 - x^3 y^3 + 5$.

10) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

Ejercicio 5.3. Suponga que $(1, 1)$ es un punto crítico de una función f con segundas derivadas parciales continuas. Si

$$f_{xx}(1, 1) = 8, f_{xy}(1, 1) = 7, f_{yy}(1, 1) = 9,$$

¿qué se puede decir respecto a f?

Ejercicio 5.4. ¿En qué punto obtiene la función f un máximo local?

1)

$$f(x, y) = 10 - 8x + 16y - 4x^2 - 4y^2,$$

2)

$$f(x, y) = \text{sen } 7x + \text{sen } 7y + \text{sen}(7x + 7y),\ 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{7},\ \ 0 \leq y \leq \frac{2\pi}{7}.$$

Ejercicio 5.5. ¿En qué punto obtiene la función f un mínimo local?

1)

$$f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5x^2 y + 15,$$

2)

$$f(x, y) = 4x^2 + 5y^2,$$

3)

$$f(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 6x^6 - 6y^2 + 2.$$

Ejercicio 5.6. Encuentre todos los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = x \text{ sen } \frac{y}{5}.$$

Ejercicio 5.7. Para la función

$$f(x, y) = x^8 + y^6 - 2x^4 - 3y^2$$

hallar los puntos críticos, estudiar si en los puntos críticos hay o no mínimos o máximos locales de f; para los casos que existan, hallar estos valores (**ayuda:** use la sustitución, $x^2 = u$, $y^2 = v$).

Ejercicio 5.8. Considere la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)^2.$$

Encuentre los valores extremos locales de f en su dominio.

Ejercicio 5.9. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre el valor máximo de la función sujeta a la restricción dada:

1)

$$f(x, y) = 5x^2 - 9y^2, \qquad 5x^2 + 9y^2 = 8;$$

2)

$$f(x, y, z) = 12x + 10y + 14z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 110;$$

3)

$$f(x, y, z) = 2x^4 + 2y^4 + 2z^4, \qquad 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1;$$

4)

$$f(x, y, z) = x + 5y, \qquad x + y + z = 7, \qquad y^2 + z^2 = 16.$$

Ejercicio 5.10. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre el valor mínimo de la función sujeta a la restricción dada:

$$f(x, y, z, t) = 5x + 5y + 5z + 5t, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 5.$$

Ejercicio 5.11. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre el valor máximo y el valor mínimo de la función sujeta a las restricciones dadas:

1)

$$f(x, y, z) = 3x - y - 9z, \qquad x + 5y - z = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 1;$$

2)

$$f(x, y) = xy, \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Ejercicio 5.12. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x, y, z) = x - \sqrt{3}y$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, usando multiplicadores de Lagrange.

Ejercicio 5.13. Encuentre el valor mínimo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

sujeto a la restricción

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n x_n = 1.$$

Suponga que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$.

Ejercicio 5.14. Encuentre el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde $n = 5$ y $c = 25$.

Ejercicio 5.15. Considere la función

$$f(x, y) = xy$$

en el dominio restringido

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Encuentre los valores extremos de f en D. Nota: Debe considerar dos casos en el interior y en el borde del disco D.

Ejercicio 5.16. Encuentre el valor del máximo absoluto de la función f en el conjunto D, donde

$$f(x, y) = 8x^2 + 3y^2 + 5x^2y + 4 \text{ y } D = \{(x, y) |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.17. Encuentre el valor del mínimo absoluto de la función f en el conjunto D, donde D es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$, mientras

$$f(x, y) = 10 + 6xy - 4x - 8y.$$

Ejercicio 5.18. Encuentre la distancia mínima desde el origen a la superficie $x + y + z = 1$.

Ejercicio 5.19. Encuentre la distancia mínima en el plano xy entre la recta $y = 2x + 2$ y la parábola $x = y^2$.

Ejercicio 5.20. Encuentre la menor distancia desde el punto (9, 3, 14) al plano $9x + 3y + 10z = 40$.

Ejercicio 5.21. Encuentre los puntos más cercanos al origen sobre la superficie

$$z^2 = xy + 16.$$

Ejercicio 5.22.

1) Determine los 3 números positivos cuya suma es 267 y su producto es un máximo.

2) Encuentre 3 números positivos cuya suma es 330 y su producto es un máximo.

Ejercicio 5.23. Determine las dimensiones del cono del volumen más grande que se puede inscribir dentro de una esfera de radio a.

Ejercicio 5.24. Determine las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma de las 12 aristas es 36.

Ejercicio 5.25. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 8 788 cm^3. Determine las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de cartón utilizado.

Ejercicio 5.26. Determine las dimensiones de la caja rectangular con mayor volumen y área superficial de

1) 96 cm^2,

2) 216 cm^2.

Ejercicio 5.27. Determine las dimensiones de la caja rectangular en la que la suma de sus aristas es igual a 108 y su volumen es máximo.

Ejercicio 5.28. Suponga que la temperatura en el espacio está dada por

$$T(x, y, z) = 200xyz^2.$$

Encuentre el punto más caliente sobre la esfera unitaria centrada en el origen del sistema coordenado.

Ejercicio 5.29. La producción total P de un cierto producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y de la cantidad K de inversión de capital. Suponga que la producción está dada por:

$$P = bL^{\alpha} K^{1-\alpha},$$

donde b y α son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de mano de obra es m y el costo de una unidad de capital es n y la compañía puede gastar sólo p dolares, la producción P está sujeta a la restricción

$$mL + nK = p.$$

Si $\alpha = 0.2$, $p = 24.750$, $m = 45$ y $n = 15$, encuentre los valores de K y L en los que ocurre la máxima producción.

CAPÍTULO 6

Integrales dobles

6.1 Integral doble sobre rectángulos

6.1.1 Definición y propiedades de la integral doble

Sea f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con valores positivos. Sea $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ un rectángulo tal que $R \subset D$. Considere el sólido Q sobre el rectángulo R que está acotado por la gráfica de $f(x, y)$ (v. figura 6.1). ¿Cómo podemos encontrar el volumen del sólido Q? Una opción es hacer lo siguiente.

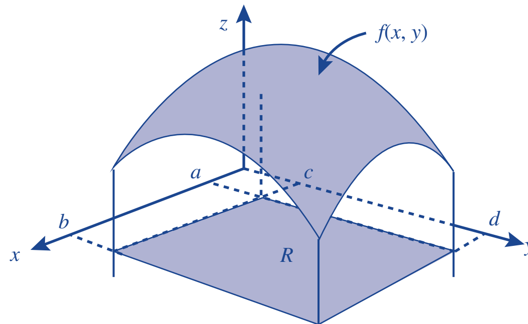


Figura 6.1. Sólido sobre R

Sean $P_x = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ una partición arbitraria del segmento $[a, b]$, y $P_y = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\}$ del segmento $[c, d]$. El conjunto

$$P_x \times P_y = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in P_x, y_j \in P_y\} \tag{6.1}$$

determina una partición R_{ij}, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, del rectángulo R en $m \times n$ rectángulos pequeños, donde $R_{ij} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ (v. figura 6.2).

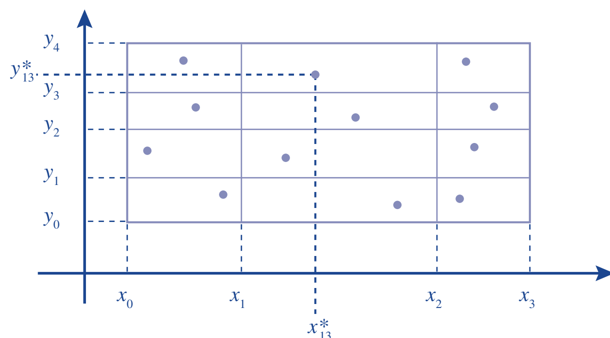


Figura 6.2. Partición del rectángulo R en 12 rectángulos pequeños

En cada rectángulo R_{ij} tomamos un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*). Si R_{ij} es "muy pequeño", entonces $f(x, y) \approx f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ para cada punto $(x, y) \in R_{ij}$, debido a la continuidad de la función $f(x, y)$. Denotemos por Q_{ij} el prisma con base el rectángulo R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. El volumen del prisma Q_{ij}, el cual denotamos por $V(Q_{ij})$, es:

$$\begin{aligned} V(Q_{ij}) &= f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)A(R_{ij}) = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j \\ &= f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

El volumen $V(Q)$ del sólido Q lo podemos aproximar con la suma de los volúmenes de todos los prismas $V(Q_{ij})$ en la ecuación (6.2). Entonces,

$$\begin{aligned} V(Q) &\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)A(R_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Si $\Delta x_i \to 0$ y $\Delta y_j \to 0$, cuando $m \to \infty$ y $n \to \infty$, los rectángulos R_{ij} van a ser más pequeños, entonces la expresión en (6.3) va a ser cada vez una mejor aproximación del valor del volumen deseado. Podemos concluir que

$$\begin{aligned} V(Q) &= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V(Q_{ij}) \\ &= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)A(R_{ij}) \\ &= \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Ejemplo 6.1. Considere la función $f(x, y) = x + y$. Sea Q el poliedro sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ acotado por la gráfica de $f(x, y)$ y los planos verticales. Tomemos las particiones $x_i = \frac{i}{m}$ del segmento $[0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $y_j = y_j = \frac{j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$ del segmento $[0, 2]$, y la partición correspondiente del rectángulo R:

$$R_{ij} = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]. \tag{6.5}$$

Entonces el área del rectángulo R_{ij} es

$$A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j = \left(\frac{i}{m} - \frac{i-1}{m}\right)\left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) = \frac{1}{mn} \tag{6.6}$$

y si tomamos $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = (\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$, que es el punto del extremo superior derecho de cada rectángulo pequeño R_{ij}, obtenemos que la suma (6.3) es

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n}\right) \frac{1}{mn}.$$

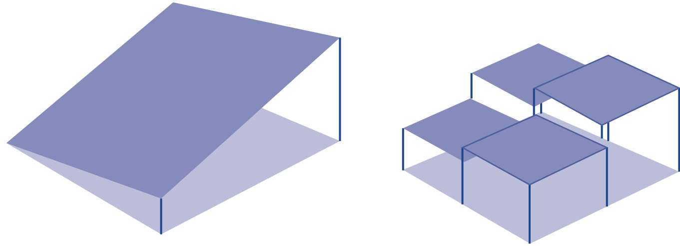


Figura 6.3. Para calcular aproximadamente el volumen del poliedro (izquierda), reemplazamos el poliedro por un conjunto de paralelepípedos (derecha) y calculamos la suma de sus volúmenes

Si $m = n = 2$ (v. figura 6.3), tenemos que

$$\begin{aligned} S_{2,2} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{i}{2} + \frac{j}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right)\right] \\ &+ \left[\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{4}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{4} = 4. \end{aligned}$$

Ahora podemos encontrar el límite de la siguiente manera. Sabemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + N = N(N + 1)/2$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{i}{m} + \frac{j}{n} \right) \frac{1}{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} \frac{i}{m} \cdot \frac{1}{mn} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=1}^{2n} \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{mn} \\ &= \frac{1}{m^2 n} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=1}^{m} i + \frac{1}{mn^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} j \\ &= 2n \cdot \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{1}{m^2 n} + m \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} \cdot \frac{1}{mn^2} \\ &= \frac{m+1}{m} + \frac{2n+1}{n}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{m,n} = \lim_{m,n \to \infty} \frac{m+1}{m} + \frac{2n+1}{n} = \lim_{m \to \infty} \frac{m+1}{m} + \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n} = 1+2 = 3.$$

Por lo tanto, el volumen $V(Q) = 3$.

Podemos observar que Q es realmente una pirámide de base rectangular con un truncamiento no paralelo a su base (v. figura 6.3) y para verificar el procedimiento descrito anteriormente calcularemos su volumen de forma analítica más adelante. ♦

Con esta motivación, definimos la integral doble.

Definición 6.1. Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función, y $R \subset D$ un rectángulo. La integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) A(R_{ij}), \tag{6.7}$$

donde $\Delta x_i, \Delta y_j \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, si el límite existe y es independiente de la elección de los puntos (x^*_{ij}, y^*_{ij}) y de la partición del rectángulo R.

Nota 6.1. La suma doble $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}) A(R_{ij})$ se llama *suma doble de Riemann*. Podemos usar esta suma para hallar el valor aproximado de la integral doble. Por ejemplo, sean $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ los centros de los rectángulos R_{ij}, entonces

$$\iint_R f(x, y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) A(R_{ij}) \tag{6.8}$$

y a esta forma de aproximar la integral doble se le conoce como el *método de los puntos medios*. Por comodidad, en la mayoría de los casos tomaremos una

partición regular del rectángulo R, es decir una partición donde todos los rectángulos pequeños son congruentes.

Ejemplo 6.2. Para resolver la integral

$$\iint_R (x + y)dA, \quad \text{donde } R = [0, 1] \times [0, 2],$$

usamos los cálculos obtenidos en el ejemplo 6.1. La suma $S_{m,n}$ es la suma de Riemann de la función $f(x, y) = x + y$, para una partición en mn rectángulos pequeños, $S_{m,n} = (m + 1)/m + (2n + 1)/n$. Por ejemplo, $S_{2,2} = 4$ es un valor aproximado de esta integral, pero $\lim_{m,n \to \infty} S_{m,n} = 3$ es el valor exacto de la integral doble.

Teorema 6.1. Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $R \subset D$ un rectángulo. Entonces, la integral doble de f sobre el rectángulo R existe.

Teorema 6.2 (propiedades de la integral doble). La integral doble sobre un rectángulo R es un funcional lineal, es decir que si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones continuas con el mismo dominio D, tal que $R \subset D$ y c es una constante, entonces

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)dA + \iint_R g(x, y)dA, \tag{6.9}$$

$$\iint_R cf(x, y)dA = c\iint_R f(x, y)dA. \tag{6.10}$$

La integral doble es un funcional positivo, es decir que si $f(x, y) \geq 0$ para todos $(x, y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x, y)dA \geq 0. \tag{6.11}$$

Si un rectángulo R se divide en dos rectángulos R_1 y R_2 tales que $R = R_1 \cup R_2$, y R_1 y R_2 se intersectan sólo en un lado, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA. \tag{6.12}$$

De este teorema podemos concluir que si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para cada (x, y), entonces

$$\iint_R f(x, y)dA \geq \iint_R g(x, y)dA. \tag{6.13}$$

Teorema 6.3 (estimativa de la integral doble). Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $R \subset D$ un rectángulo. Denotaremos por $f_{\text{máx}}$ y $f_{\text{mín}}$ el valor máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ en el rectángulo R respectivamente. Entonces,

$$f_{\text{mín}} \; A(R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq f_{\text{máx}} \; A(R). \tag{6.14}$$

Ejemplo 6.3.

Considere la integral doble $\iint_R (x^2 + y^2 - 3) dA$, donde $R = [-1, 1] \times [-1, 4]$. Para estimar la integral necesitamos encontrar los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ en R. En primer lugar, encontramos los puntos críticos de $f(x, y)$ en el interior del rectángulo R:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x = 0, \; \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0.$$

La matriz de segundas derivadas de $f(x, y)$ en el punto (0, 0) es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, para usar el criterio de la segunda derivada, calculamos

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix} > 0,$$

entonces el punto (0, 0) es mínimo local y $f(0, 0) = -3$ es el valor mínimo local. No hay otros mínimos o máximos locales en el interior del rectángulo R, pero no sabemos qúe sucede en la frontera del rectángulo.

Para esto necesitamos considerar la función $f(x, y)$ únicamente sobre la frontera de R.

Los vértices del rectángulo R son $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 4)$ y $D(-1, 4)$. La frontera consiste en cuatro lados AB, BC, CD y DA:

$$\begin{aligned} AB &= \{(x, -1) \mid -1 \leq x \leq 1\}, & BC &= \{(1, y) \mid -1 \leq y \leq 4\} \\ CD &= \{(x, 4) \mid -1 \leq x \leq 1\}, & DA &= \{(-1, y) \mid -1 \leq y \leq 4\} \end{aligned}$$

Consideremos por ejemplo el lado AB. Sobre este lado la función f es una función de una variable $g(x) = f(x, -1) = x^2 - 2$ definida en $-1 \leq x \leq 1$, y el valor máximo de g, o f restringida en AB, es -1, y el valor mínimo es -2. De manera similar encontramos los valores extremos en otros lados: BC, CD y DA. Finalmente obtenemos la tabla:

Dominio considerado	$f_{\text{mín}}$	$f_{\text{máx}}$
Interior de R	-3	no hay
Lado AB	-2	-1
Lado BC	-2	14
Lado CD	13	14
Lado DA	-2	14

Por lo tanto, podemos concluir que el valor máximo de $f(x, y)$ sobre el rectángulo R es $f_{\text{máx}} = 14$ y el valor mínimo es $f_{\text{mín}} = -3$. El área $A(R)$ del rectángulo R es 10. Entonces la estimativa buscada de la integral es:

$$-130 \leq \iint_R (x^2 + y^2 - 3)dA \leq 140.$$

6.2 Integral iterada

Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \tag{6.15}$$

un rectángulo tal que $R \subset D$. Si integramos la función $f(x, y)$ respecto a la variable y, obtenemos una función en la variable x:

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)dy. \tag{6.16}$$

Entonces, podemos construir dos integrales iteradas:

$$\int_b^a \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx, \qquad \int_d^c \left[\int_a^b f(x, y)\, dy\right] dx. \tag{6.17}$$

Ejemplo 6.4. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + 2xy$. Un ejemplo de una integral iterada de $f(x, y)$ es

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 f(x, y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_2^3 (x^2 + 2xy)dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[(x^2y + xy^2)\Big|_2^3\right] dx = \int_0^1 \left[x^2 + 5x\right] dx = \frac{17}{6}.$$

Cambiando el orden de las variables de integración obtenemos la otra integral iterada:

$$\int_2^3 \left[\int_0^1 f(x, y)dx\right] dy = \int_2^3 \left[\int_0^1 (x^2 + 2xy)dx\right] dy$$
$$= \int_2^3 \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2y\right)\Big|_0^1\right] dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{3} + y\right] dy = \frac{17}{6}.$$

Observemos que los resultados coinciden, este hecho no es por accidente (v. teorema 6.4).

Las integrales iteradas nos brindan la herramienta principal para resolver las integrales dobles, por el siguiente teorema.

Teorema 6.4 (teorema de Fubini). Sean $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ un rectángulo tal que $R \subset D$. Entonces,

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_b^a \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dy\right] dx. \quad (6.18)$$

Ejemplo 6.5. Considere la función $f(x, y) = x + y$ en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ de los ejemplos 6.1 y 6.2. La integral iterada de f sobre R es

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_0^1 \int_0^2 f(x, y)dy\Big] dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 (x + y)dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2\right] dx = \int_0^1 [2x + 2]dx = 3,$$

y por el teorema de Fubini (v. teorema 6.4) podemos comprobar que es igual a la otra integral iterada:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^2 \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 (x+y)dx\right] dy$$
$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x + xy\Big|_0^1\right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} + y\right] dy = 3.$$

Este resultado corresponde al valor del volumen del sólido considerado en el ejemplo 6.1.

Nota 6.2. Tenemos la siguiente fórmula útil. Sea $f(x, y)$ una función continua que es el producto de dos funciones $g(x)$, y $\in(y)$, $f(x, y) = g(x) \in (y)$, $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy. \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.6 (**ejercicio resuelto**). Calcule la integral

$$\int_R x \text{ sen } y \, dydx, \text{ donde } R = [0, 2] \times [0, \pi/2]$$

(el valor de la integral es el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x$ sen y y los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, y $= \pi/2$, $z = 0$).

Tenemos,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \text{ sen } y \, dydx \\ &= \left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^{\pi/2} \text{sen } y\,dy\right) = 2. \end{aligned} \tag{6.20}$$

6.3. Aplicaciones de la integral doble

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones de la integral doble. En el próximo capítulo veremos algunos otros, los cuales involucran regiones de integración más generales.

6.3.1 Volumen de un sólido debajo de una gráfica

Teorema 6.5 (volumen de un sólido). Considere el sólido Q acotado por encima por la gráfica de una función continua positiva $f(x, y)$, por debajo por un rectángulo R y por los lados por los planos verticales que contienen los lados del rectángulo R. Entonces, el volumen de Q es

$$V(Q) = \iint_R f(x, y)dA. \tag{6.21}$$

Ejemplo 6.7 (**ejercicio resuelto**). hallar el volumen del sólido Q sobre el rectángulo $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ entre las gráficas de la función $f(x, y) = \cos(x + y) + 3$ y el plano $z = g(x, y) = 2$.

Sean Q_1 el sólido sobre el rectángulo R acotado por la gráfica de $f(x, y) = \cos(x + y) + 3$, y Q_2 el paralelepípedo sobre R acotado por el plano $z = 2$. Dado que $f(x, y) \geq g(x, y)$, el volumen $V(Q) = V(Q_1) - V(Q_2)$. Por simple cálculo sabemos que $V(Q_2) = 2\pi \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi^2$. Para hallar $V(Q_1)$ calculamos la integral doble,

$$\begin{aligned}
V(Q_1) &= \iint_R (f(x, y))dA = \iint_R (\cos(x + y) + 3)dA \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x + y) + 3)dx\right] dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} [(\operatorname{sen}(x + y) + 3x)|_{-\pi}^{\pi}]\, dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} [(\operatorname{sen}(\pi + y) - \operatorname{sen}(-\pi + y) + 6\pi)]\, dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi dy = 12\pi^2.
\end{aligned}$$

Entonces, $V(Q) = 4\pi^2$.

6.3.2 Valor promedio de una función

Con la integral doble podemos hallar el valor promedio de una función $f(x, y)$ definida en un rectángulo R:

$$\bar{f} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)dA. \tag{6.22}$$

Ejemplo 6.8 (**ejercicio resuelto**). Consideremos una lámina que ocupa el rectángulo limitado por las rectas $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 3$ y que tiene función de distribución de densidad de masa $\mu(x, y) = xy$.

1) ¿Cuál es la masa M de la lámina?

2) ¿Cuál es el valor promedio $\bar{\mu}$ de la densidad μ?

3) ¿Cuál sería la masa de la lámina con una densidad constante igual a $\bar{\mu}$?

1) Podemos hallar la masa M de la lámina por la siguiente fórmula:

$$M = \iint_R \mu(x, y) dA.$$

Entonces, por la fórmula (6.19), tenemos

$$M = \iint_R xydA = \int_1^3 \left[\int_1^3 xydx \right] dy = \left(\int_1^3 xdx \right) \left(\int_1^3 ydy \right)$$
$$= \left(\int_1^3 xdx \right)^2 = 16.$$

2) El área $A(R) = 4$, entonces el valor promedio de la densidad $\mu(x, y) = xy$ es $\bar{\mu} = 4$.

3) Si la densidad es constante $\bar{\mu}\,(x, y) = \bar{\mu} = 4$, entonces la masa de la lámina $M = 4 \cdot 4 = 16 = M$. La última igualdad siempre es verdadera porque

$$M = \iint_R \mu(x, y)\, dA = \bar{\mu} A(R).$$

6.4 Ejercicios del capítulo 6

Ejercicios recomendados: 1-4, 7, 10, 13-18, 20.

Ejercicio 6.1. Sea f una función constante, $f(x, y) = 6$, y

$$R = \{(x, y) \mid 5 \leq x \leq 10, 3 \leq y \leq 16\}.$$

Calcule la integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dA.$$

Ejercicio 6.2. Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

1) $\iint_R 4\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 8, 3 \leq y \leq 12\}$.
2) $\iint_R (8 - x)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 11\}$.
3) $\iint_R (16 - 2y)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 15, 3 \leq y \leq 7\}$.

Ejercicio 6.3. Sea V el volumen del sólido debajo de la gráfica

$$f(x, y) = \sqrt{121 - x^2 - y^2}$$

y arriba del rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6\}.$$

Use las líneas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir R en cuatro rectángulos. Calcule la suma de Riemann usando las esquinas inferiores izquierdas.

Ejercicio 6.4. Halle una aproximación de la doble integral

$$\iint_R (3x - 4y^2)\, dA, \quad \text{donde}$$

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 4\}$$

usando una suma doble de Riemann con $m = n = 2$ y los puntos de muestra en la esquina superior derecha.

Ejercicio 6.5. Halle una aproximación de la doble integral

$$\iint_R (2x - 3y^2)\, dA,$$
$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 8\}$$

usando una suma doble de Riemann con $m = n = 2$ y los puntos de muestra en la esquina inferior derecha.

Ejercicio 6.6. Se divide R en cuatro cuadrados iguales y se usa la regla del punto medio. Encuentre un valor estimado para el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide elíptico

$$f(x, y) = 129 - 3x^2 - 2y^2$$

y arriba del rectángulo

$$R = [0, 4] \times [0, 4].$$

Ejercicio 6.7. Dada la tabla de valores para una función $f(x, y)$ definida en

$$R = [5, 7] \times [3, 7].$$

x \ y	3	4	5	6	7
5	6	13	–8	3	8
5.5	3	4	8	8	11
6	3	–4	3	10	10
6.5	7	–4	9	10	0
7	–3	0	9	10	14

Estime el valor de

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

usando la regla del punto medio con $m = n = 2$.

Ejercicio 6.8. Dada la tabla de valores para una función $f(x, y)$ definida en

$$R = [4, 6] \times [4, 8].$$

x \ y	4	5	6	7	8
4	7	15	0	–5	8
4.5	4	5	6	7	8
5	26	10	11	12	13
5.5	9	4	5	6	7
6	–1	2	3	4	5

Estime el valor de

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

tomando los puntos de muestra en la esquina superior derecha de cada rectángulo con $m = n = 4$.

Ejercicio 6.9. Una piscina de 30 pies por 20 pies se llena con agua. La profundidad se mide en intervalos de 5 pies, empezando en la esquina superior izquierda de cada rectángulo.

x \ y	0	5	10	15	20	25	30
0	3	5	7	8	10	11	11
5	3	5	7	9	11	13	11
10	3	6	9	10	13	15	13
15	3	7	7	7	9	11	10
20	3	3	3	3	5	7	7

Estime el volumen de agua en la piscina.

Ejercicio 6.10. Sean $R = [-3, 1] \times [-2, 2]$ y $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

1) Halle el valor aproximado de la integral doble $\iint_R f(x, y)dA$ usando una suma de Riemann con $m = 4$, $n = 4$, y tomando los puntos (x_i^*, y_a^*) en los centros de los rectángulos R_{ia}.

2) Use el teorema 6.3 para estimar la integral doble $\iint_R f(x, y)dA$. hallar los valores extremos de $f(x, y)$ en R, convencerse de que I_a e I_e están en el segmento $[8f_{\text{mín}}, 8f_{\text{máx}}]$.

Ejercicio 6.11. Sean $R = [0, 2] \times [0, 4]$ y $f(x, y) = xy$.

1) Halle aproximadamente el valor I_a de la integral doble $\iint_R f(x, y)dA$. Para esto use la suma de Riemann con $m = 2$, $n = 4$, y tome los puntos I_e e I_a en los centros de los rectángulos R_{ia}.

2) Halle el valor exacto I_e de la integral doble $\iint_R f(x, y)dA$ usando integrales iteradas. Comparar I_e con I_a.

3) Use el teorema 6.3 para estimar la integral doble $\iint_R f(x, y)dA$. Para esto hallar primero los valores extremos de $f(x, y)$ en R, y convencerse de que I_a e I_e están en el segmento $[8f_{\text{mín}}, 8f_{\text{máx}}]$.

4) Halle el valor promedio $\bar{f}$ de la función f sobre el rectángulo R.

Ejercicio 6.12. Sean $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ y $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$.

1) Bosqueje el sólido sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 1]$ acotado por la gráfica de la función $f(x, y)$.

2) Halle su volumen aproximado usando una suma de Riemann con $m = 2, n = 4$ y tomando los puntos (x_i^*, y_a^*) en los centros de los rectángulos R_{ia}).

3) Halle el valor exacto del volumen.

Ejercicio 6.13. Sea $f(x, y) = 6x + 3x^2y$. Calcule la integral.

1) $\int_0^4 f(x, y)\, dy$.

2) $\int_1^3 f(x, y)\, dx$.

Ejercicio 6.14. Calcule la integral iterada

1) $\int_1^2 \int_0^1 (4 + 5xy)\, dx\, dy$.

2) $\int_0^1 \int_0^3 \sqrt{x + y}\, dx\, dy$.

3) $\int_3^4 \int_3^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\, dx\, dy$.

4) $\int_0^{\ln 5} \int_0^{\ln 2} e^{4x-y}\, dx\, dy$.

Ejercicio 6.15. Calcule el valor de la integral doble,

1) $\iint_R xye^y dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

2) $\iint_R \frac{4+x^2}{1+y^2}\, dA$, donde $R = (x, y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$.

3) $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, donde $R = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

4) $\iint_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 4}\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$.

5) $\iint_R (5x^2y^3 - 2x^4\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1\}$.

6) $\iint\limits_R \dfrac{2y}{x^2 + 4} dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

7) $\iint\limits_R \dfrac{y}{x^2 + y^2} dA$, donde $R = [1, 2] \times [-1, 1]$.

8) $\iint\limits_R (x - 2y) dA$, donde R es el rectángulo limitado por las rectas $y = -1$, $y = 1$, $x = 3$, y el eje OY.

Ejercicio 6.16. Encuentre el volumen del sólido:

1) debajo del plano $z = 4x + 3y + 2$ y arriba del rectángulo $R = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3\}$,

2) debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba del rectángulo $R = [-4, 4] \times [-3, 3]$,

3) debajo del paraboloide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$,

4) encerrado por la superficie $z = x\sqrt{3x^2 + 3y}$, y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$;

5) encerrado por la superficie $z = 6 + (x - 6)^2 + 3y$, los planos $x = 2$, $y = 2$ y los planos coordenados,

6) encerrado por el cilindro $z = 9 - y^2$ y el plano $x = 2$ en el primer octante,

7) encerrado por la superficie $z = 14 - xy$ y los planos $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$ y $z = 0$.

Ejercicio 6.17. Bosqueje el sólido sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ acotado por la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, y halle su volumen.

Ejercicio 6.18. Bosqueje el sólido sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ entre las gráficas de las funciones $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = x + y + 1$, y halle su volumen.

Ejercicio 6.19. Bosqueje el sólido sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ entre las gráficas de las funciones $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = xy + 2$, y halle su volumen.

Ejercicio 6.20. Calcule el valor promedio de la función $f(x, y)$ sobre la región R donde

1) $f(x, y) = x^2y$ y R es el rectángulo con vértices $(-3, 0)$, $(-3, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$,

2) $f(x, y) = x^3 - xy$ y R es el rectángulo acotado por las rectas $x = 0$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 6$.

Ejercicio 6.21. halle la masa de la lámina de densidad $\mu(x, y) = e^{x+y}$ que ocupa el rectángulo limitado por las rectas $y = -1$, $y = 1$, $x = 3$, y $x = 5$.

Ejercicio 6.22. La temperatura en los puntos del rectángulo $R = [-2, 3] \times [3, 6]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. ¿Cuál es la temperatura media? ¿En qué puntos del rectángulo la temperatura es igual a la temperatura media?

CAPÍTULO 7 Integrales dobles: regiones generales

7.1 Integrales dobles sobre regiones tipos I, II y III

Definición 7.1. Una región D en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto con su frontera.

Ejemplo 7.1. Algunas regiones de $\mathbb{R}^n$

1) $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Rectángulo.

2) $D = \{(x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\}$. Círculo cerrado.

3) $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 - 2x_2 \geq 5\}$. Semiespacio.

Definición 7.2. Sea D una región acotada del plano, es decir D está contenida en algún rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ del plano. Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función.

Tipo I. Diremos que D es de tipo I y la denotamos por D_I si D se puede describir mediante las desigualdades:

$$D_I = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \end{cases}$$

donde $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ son funciones reales continuas definidas sobre $[a, b]$. Si una región D es de tipo I, entonces la integral doble de f sobre D es

$$\iint_{D_I} f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

si la integral iterada existe.

Tipo II. Diremos que D es de tipo II y la denotamos por D_{II}, si D se puede describir mediante las desigualdades:

$$D_{II} = \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases}$$

donde $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ son funciones reales continuas definidas sobre $[c, d]$. Si una región D es de tipo II, entonces la integral doble de f sobre D es

$$\iint_{D_{II}} f(x, y)\ dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\ dxdy$$

si la integral iterada existe.

Tipo III. Diremos que D es de tipo III si D es a la vez de tipo I y de tipo II.

Si una región es de tipo III, se puede cambiar el orden de integración de tipo I a tipo II o viceversa, es decir, podemos extender el teorema de Fubini (6.4) y escribir:

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dxdy.$$

Definición 7.3 (integrabilidad). Una función f es integrable en una región tipos I o II, si la integral de f sobre la región existe.

Ejemplo 7.2. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el valor de la integral doble iterada,

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 \operatorname{sen}(x^2)\ dxdy.$$

La región de integración es el triángulo mostrado en la figura 7.1, la cual es de tipo III. Observando la gráfica, podemos escribir la región como tipo I y como tipo II así:

$$D_I = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x/2, \end{cases} \qquad D_{II} = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 2y \leq x \leq 2. \end{cases}$$

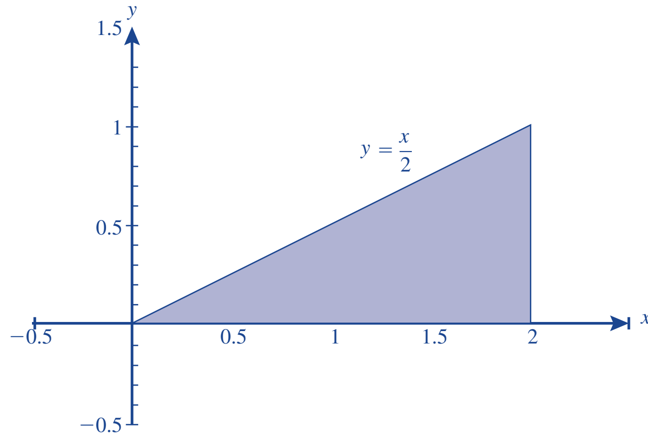


Figura 7.1. Región de integración tipo III: D

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{2y}^2 \operatorname{sen} x^2 \; dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^{x/2} \operatorname{sen} x^2 \; dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \operatorname{sen} x^2 \left[\int_0^{x/2} dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{2} \operatorname{sen} x^2 \; dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 2x \operatorname{sen} x^2 \; dx = \frac{1-\cos 4}{4}.\end{aligned}$$

Definición 7.4. Un *conjunto de medida* cero en el plano es un conjunto A con la siguiente propiedad: para cualquier número $\varepsilon > 0$ podemos cubrir el conjunto A con un número finito de rectángulos, tales que la suma de sus áreas es menor que ε.

Ejemplo 7.3. El conjunto vacío, un punto, un conjunto finito de puntos, un conjunto numerable de puntos, un intervalo, una circunferencia, una curva con longitud determinada son ejemplos, entre otros, de conjuntos de medida cero. Pero un rectángulo o un círculo no son conjuntos de medida cero.

Teorema 7.1 (sobre integrabilidad). Sea f una función definida en una región D del plano de tipos I, II o III.

1) Si f es continua en D, entonces es integrable en D, es decir el valor de la integral doble en D existe.

2) Una función acotada f es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de D, donde f es discontinua, tiene medida cero.

Definición 7.5. Sea D una región tal que

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k, \tag{7.1}$$

donde cada D_i es una región de tipo I o tipo II y para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots k\}$ $(i \neq j)$ $D_i \cap D_j$ es un conjunto de medida cero. Supongamos que una función f es integrable sobre cada región D_i, entonces la integral doble de f sobre D se define como

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x, y)\, dA. \tag{7.2}$$

Al conjunto de las regiones D_i ($i \in \{1, 2, \ldots k\}$) se le llama una *partición de D*. El valor de la integral no depende de la partición tomada para D.

Ejemplo 7.4. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el valor de la integral doble de la función $f(x, y) = xy$ sobre la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$.

La región es de tipo I y se puede escribir como,

$$D_I = \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

En este caso $\phi_1(x) = x^2$ y $\phi_2(x) = 4$ (v. figura 7.2). Por lo tanto la integral doble de f se puede plantear y resolver como una integral doble iterada sobre esta región.

$$\iint_{D_I} xy\, dA = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} xy\, dy dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} xy^2\Big|_{x^2}^{4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x(16 - x^4)\, dx = 0.$$

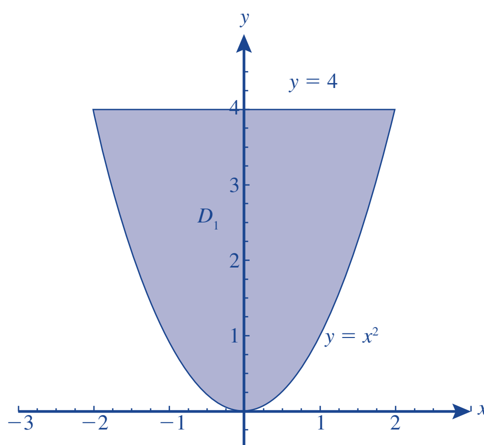


Figura 7.2. Región de integración tipo I: D_I

La región de integración D_I es simétrica respecto al eje y y la función en el integrando $f(x, y) = xy$, es impar con respecto a x; es decir, $f(-x, y) = -f(x, y)$. La gráfica de $f(x, y)$ es un paraboloide hiperbólico o silla de montar, es antisimétrica respecto a x y su integral es igual a cero, lo cual es otra forma de encontrar el resultado.

Ejemplo 7.5. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el valor integral doble de la función $f(x, y) = x^2$ sobre la región acotada por la parábola $x = y^2$ y las rectas $x = -1$, $y = -1$, $y = 1$.

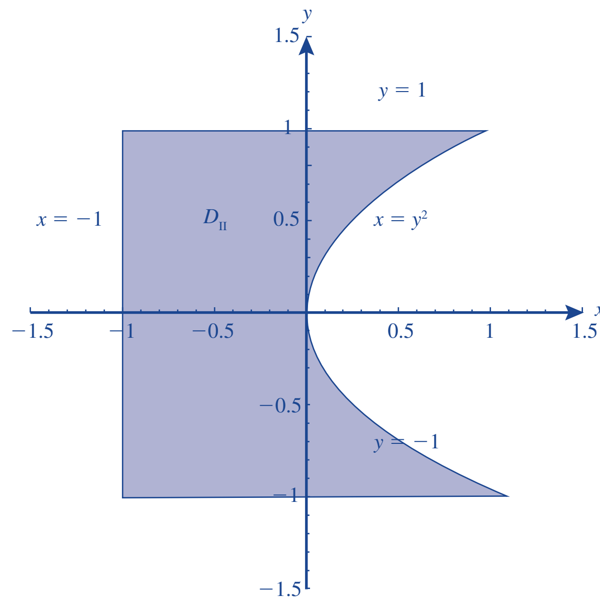


Figura 7.3. Región de integración tipo II: D_{II}

La región es una región de tipo II (v. figura 7.3), por lo tanto

$$\iint_{D_{II}} x^2\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y^2} x^2\, dxdy = \frac{16}{21}. \qquad (7.3)$$

Teorema 7.2 (Propiedades). Sean D una región del plano de tipos I, II o III, con $A(D)$ el valor del área de la región D, $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$, funciones reales acotadas y continuas en dos variables en D, excepto un conjunto de medida cero, entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

Linealidad:

$$\iint_D (f+g)(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA,$$
$$\iint_D (\lambda f)(x,y)\,dA = \lambda \iint_D f(x,y)\,dA, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Producto: el producto $f\,g$ es integrable en D.

Cociente: si además $|g(x,y)| \geq k$ para todo $(x,y) \in D$ y cierto valor $k > 0$, entonces el cociente f/g es integrable en D.

Monotonía: si además para cada $(x,y) \in D$ tenemos $f(x,y) \leq g(x,y)$, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA. \tag{7.5}$$

Teorema del valor medio (TVM): si además f es continua en D, entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0, y_0)A(D). \tag{7.6}$$

Aditividad: si además $D = D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2$ es un conjunto de medida cero entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA. \tag{7.7}$$

Acotación: si $f_{\text{mín}}$ es el valor mínimo y $f_{\text{máx}}$ es el valor máximo de f en D, entonces

$$(f_{\text{mín}}) \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq (f_{\text{máx}}) \cdot A(D). \tag{7.8}$$

7.1.1 Aplicaciones de la integral doble

Sean D una región del plano de tipos I, II o III, con $A(D)$ el valor del área de la región D, $f(x,y)$ una función real en dos variables acotada e integrable en D.

Volumen. Si $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, el volumen V debajo de la gráfica $z = f(x, y)$, y encima de la región D es

$$V = \iint_D f(x, y)\, dA.$$

Área. El área de D es

$$A(D) = \iint_D dA.$$

Promedio. El valor promedio de f sobre D es

$$\bar{f} = \frac{\iint_D f(x, y)\, dA}{A(D)}.$$

Masa. La masa M de una placa plana de forma de la región D y con función de distribución de densidad de masa en cada punto de D, dada por $\delta(x, y)$, es

$$M = \iint_D \delta(x, y)\, dA.$$

Primeros momentos. Los primeros momentos M_x, M_y de una placa plana de forma de la región D y con función de distribución de densidad de masa en cada punto de D, dada por $\delta(x, y)$, es

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)\, dA, \qquad M_y = \iint_D x\delta(x, y)\, dA.$$

Centro de masa. El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una placa plana de forma de la región D y con función de distribución de densidad de masa en cada punto de D, dada por $\delta(x, y)$, tiene coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

Momentos de inercia. Los momentos de inercia (segundos momentos) respecto al eje x, I_x, respecto al eje y, I_y, y respecto al origen I_0 de una placa plana de forma de la región D y con función de distribución de densidad de masa en cada punto de D, dada por $\delta(x, y)$, son

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y)\, dA, \qquad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y)\, dA, \qquad I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \delta(x, y)\, dA.$$

Nota 7.1. El valor promedio

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dA}{A(D)} \tag{7.9}$$

pertenece al intervalo $[f_{\text{mín}}, f_{\text{máx}}]$.

Nota 7.2. El punto (x_0, y_0) en el TVM, (teorema 7.2), satisface la propiedad $f(x_0, y_0) = \bar{f}$, donde $\bar{f}$ es el valor promedio de la función f.

Ejemplo 7.6. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el centro de masa de una placa plana homogénea en forma de la región en el primer cuadrante del plano acotada por las curvas $y = x$, $y = x^2$.

Dado que la placa es homogénea, esto significa que la función de distribución de densidad de masa $\delta(x, y) = k$, para algún valor $k > 0$ constante.

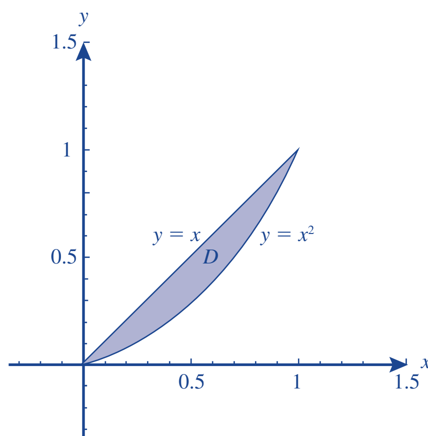


Figura 7.4. Dominio de integración: D

La región (v. figura 7.4) es una región de tipo III, por lo tanto, la podemos considerar como tipo I. De esta manera tenemos,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6},\\
M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dydx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{1}{15},\\
M_y &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dydx = \int_0^1 \left(xy\,\Big|_{y=x^2}^{y=x}\right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12},\\
(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right) = (0.5, 0.4).
\end{aligned}
$$

7.2 Cambio de variables en integrales dobles: jacobiano

7.2.1 Coordenadas curvilíneas

Sean (x, y) el sistema de coordenadas cartesianas en una región D del plano. Las funciones derivables g_1 y g_2 definen en D un sistema de *coordenadas curvilíneas,* si la aplicación ϕ: $D \rightarrow R$, (x, y) (u, v) donde

$$
\begin{aligned}
u &= g_1(x, y)\\
v &= g_2(x, y)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

es biyectiva y la aplicación inversa ϕ^{-1}: $R \rightarrow D$, (u, v) está definida por las funciones derivables f_1 y f_2:

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(u, v)\\
y &= f_2(u, v).
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

En este caso el determinante de la matriz *jacobiana* del cambio de coordenadas de (x, y) a (u, v),

$$
J\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix},
\tag{7.12}
$$

es invertible y el determinate de la matriz inversa, proporciona el *cambio de coordenadas* de (u, v) a (x, y):

$$
J\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{matrix}.
\tag{7.13}
$$

Ejemplo 7.7. Sea D la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = 4x$, $x = 3y$ y las hipérbolas $y = 1/x$, $y = 4/x$ (fig. 7.5). Estas ecuaciones se pueden reescribir respectivamente como $y/x = 4$, $y/x = 1/3$, $xy = 1$, $xy = 4$. Por lo tanto el cambio de coordenadas natural

$$u = y/x,$$
$$v = xy$$

define una región R acotada por las rectas $u = 1/3$, $u = 4$, $v = 1$, $v = 4$, que es un rectángulo con los lados paralelos a los ejes coordenados u y v (fig. 7.6).

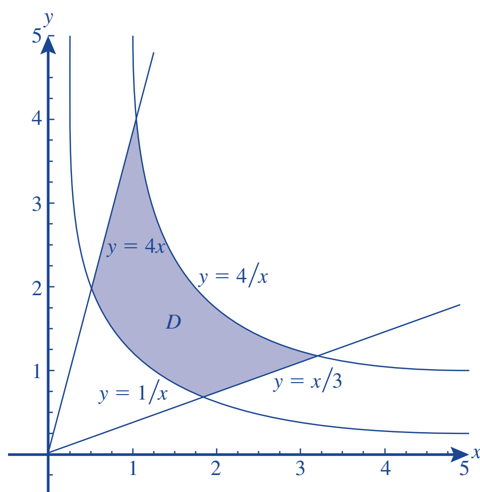


Figura 7.5. Región D en el plano xy

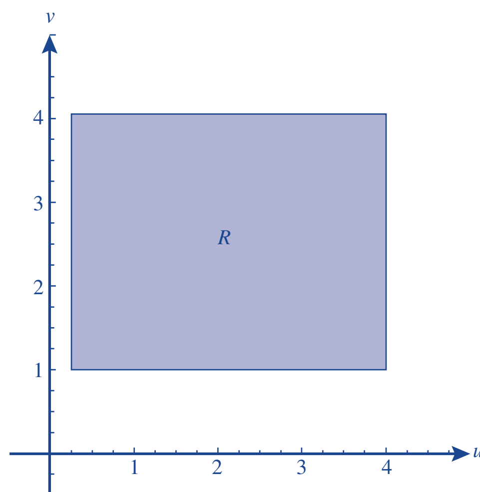


Figura 7.6. Región R en el plano uv

♦

Teorema 7.3 (Cambio de variables en integrales dobles). Dada una integral doble $\iint_D f(x, y)dA$ y un cambio de coordenadas de (x, y) a unas coordenadas nuevas (u, v) definido por las coordenadas curvilíneas:

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

donde g y h son funciones derivables, se satisface:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_R f(g(u, v), h(u, v))\, |J(u, v)|\, dudv, \qquad (7.14)$$

donde

$$D = \{(g(u, v), h(u, v)) \mid (u, v) \in R\}, \tag{7.15}$$

$|J(u, v)|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz jacobiana,

$$J(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{bmatrix}. \tag{7.16}$$

A $J(u, v)$ se le llama el *jacobiano*.

El cambio de coordenadas lo usamos en la mayoría de los casos para simplificar la región de integración o para simplificar el integrando.

Ejemplo 7.8. (**Ejercicio resuelto**). Consideremos la integral

$$\iint_D (x^2 - y)\, dA, \tag{7.17}$$

donde D es el paralelogramo con vértices en $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(3, 3)$, $D(2, 1)$ (fig. 7.7). Los lados de este paralelogramo tienen ecuaciones

$$\begin{aligned} AB&: \quad y - 2x = 0, \\ BC&: \quad y - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}, \\ CD&: \quad y - 2x = -3, \\ AD&: \quad y - \frac{1}{2}x = 0. \end{aligned} \tag{7.18}$$

El cambio natural de coordenadas es:

$$\begin{aligned} u &= y - 2x, \\ v &= y - \frac{1}{2}x. \end{aligned} \tag{7.19}$$

El resultado de este cambio de coordenadas es que el paralelogramo $ABCD$ se transforma en el rectángulo $A'B'C'D'$ acotado por las rectas con ecuaciones

$$\begin{aligned} A'B'&: \quad u = 0, \\ B'C'&: \quad v = \frac{3}{2}, \\ C'D'&: \quad u = -3, \\ A'D'&: \quad v = 0, \end{aligned} \tag{7.20}$$

la cual es una región de tipo III (fig. 7.8)

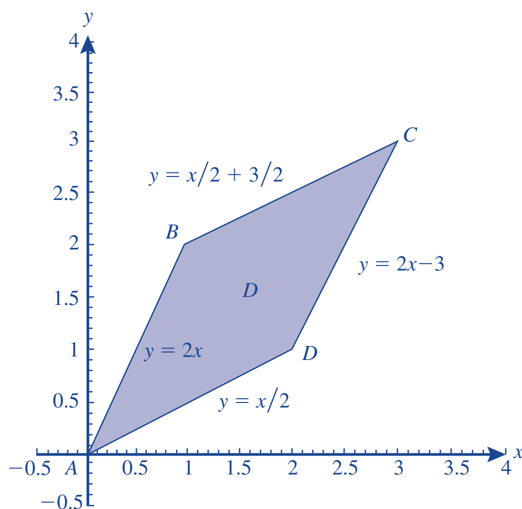


Figura 7.7. Región D en el plano xy

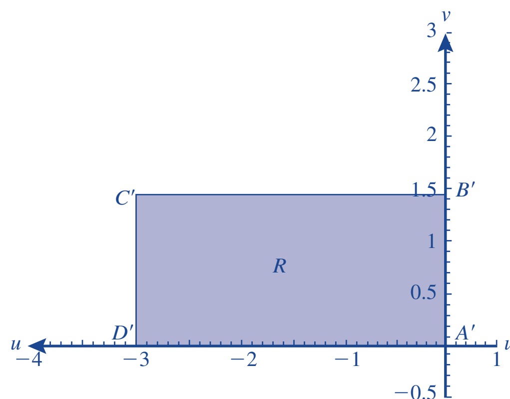


Figura 7.8. Región R en el plano uv

En este ejemplo la transformación T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del plano con coordenadas (u, v) al plano con coordenadas (x, y), tal que $T(R) = D$, es una transformación lineal y por lo tanto la matriz de la transformación A_T es igual a la matriz jacobiana

$$A_T = J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto con esta matriz podemos hallar las coordenadas de los puntos A', B', C', D' en el plano uv multiplicando la matriz A por el vector columna de las componentes del radio vector asociado a cada punto: $A'(0, 0)$, $B'(0, 3/2)$, $C'(-3, 3/2)$, $D'(-3, 0)$.

La transformación inversa T^{-1}: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del plano con coordenadas (x, y) al plano con coordenadas (u, v), tal que $T^{-1}(D) = R$ es

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}u + \frac{2}{3}v, \\ y &= -\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}v. \end{aligned} \tag{7.21}$$

La matriz B de la transformación (7.21) es la matriz inversa de A_T, $B = A_T^{-1}$ y corresponde a la matriz jacobiana necesaria para usar el teorema de cambio de variables (teorema 7.3),

$$B = A_T^{-1} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow |J(u,v)| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Finalmente usando el teorema de cambio de variables tenemos,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 - y)\, dA &= \iint_R f(u,v)|J(u,v)|\, dA \\
&= \int_{-3}^{0}\int_{0}^{3/2} \left[\left(\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}u\right)^2 - \frac{4}{3}v + \frac{1}{3}u\right]\left(\frac{2}{3}\right) dvdu \\
&= \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.9. (**Ejercicio resuelto**). Calcular el valor de la integral doble

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dA \tag{7.22}$$

donde D es la región descrita en el ejemplo (7.7).

En este caso tenemos que ambas regiones D y R están en el primer cuadrante, es decir $x > 0$, $y > 0$, $u > 0$, $v > 0$, por lo tanto,

$$\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases}$$

$$|J(x,y)| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = \left|-2\frac{y}{x}\right| = |-2u| = 2u.$$

Entonces,

$$|J(u,v)| = \frac{1}{2u}. \tag{7.23}$$

Usando el teorema de cambio de variables (7.3), tenemos

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dA = \iint_R u^2\left(\frac{1}{2u}\right) dA = \frac{1}{2}\int_{1/3}^{4}\int_{1}^{4} u\, dvdu = \frac{143}{12}.$$

Nota 7.3 (Interpretación del jacobiano). Para el caso particular si $f(x, y) = 1$ en el teorema de cambio de variables (7.3), podemos decir que el jacobiano es un factor de deformación entre las figuras relacionado con sus áreas. Por ejemplo si el jacobiano $|J(u, v)|$ es constante, entonces este número indica la razón entre las áreas de D y R, $|J(u, v)| = A(D)/A(R)$. En el caso en que no sea constante por el teorema del valor medio (7.2) existe al menos un punto (u_0, v_0) en R para el cual el valor promedio del jacobiano en R es la razón entre las áreas de D y R, $|J(u_0, v_0)| = A(D)/A(R)$.

Ejemplo 7.10. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el volumen acotado por el cilindro recto $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el primero y segundo octantes.

En este problema nos piden calcular el volumen debajo de la superficie $z = x^2 + y^2$ encima de la región en el plano (xy) acotada por la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Por lo tanto, la región de integración D es de tipo III y se puede describir como una región de tipo I,

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

El volumen viene dado por:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dydx = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dydx.$$

Quizá no sea difícil resolver la integral, pero mejor usaremos un cambio de variables a coordenadas polares (r, θ) en el plano. La transformación del cambio de variables está definido por:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Calculando el jacobiano para esta transformación de coordenadas tenemos,

$$J(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \tag{7.24}$$
$$= r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r \Rightarrow |J(r,\theta)| = r.$$

Los límites de integración se pueden obtener por simple inspección del dominio de integración D (v. figura 7.9).

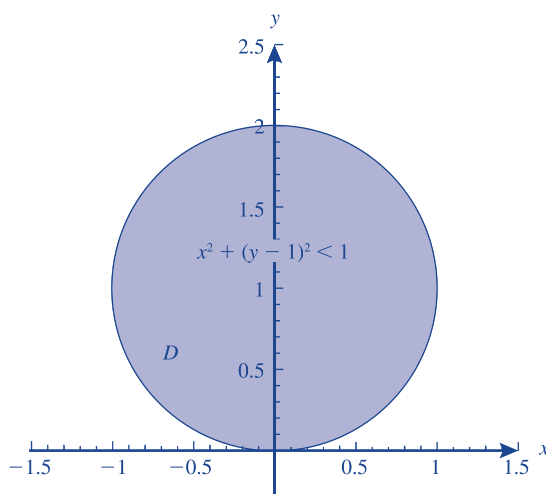


Figura 7.9. Dominio de integración: D

La ecuación $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ en coordenadas polares es igual a $r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta + 1 = 1$, la cual es equivalente a $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ cuando $r \neq 0$. Por lo tanto los límites corresponden a $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta$. Usando el teorema 7.3 tenemos:

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA &= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} (r^2)(r) dr \right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(16 \operatorname{sen}^4 \theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} d\theta - 2 \int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 4\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

7.3 Ejercicios del capítulo 7

Ejercicios recomendados:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17

Ejercicio 7.1. Use la propiedad de acotación (7.8) de las integrales dobles para estimar el valor de:

1) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, $D = [0, 1] \times [0, 2]$;

2) $I = \iint_D e^{4-x^2-y^2}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$;

3) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$;

4) $I = \iint_D e^{4-x^2-y^2}$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \text{sen}(x)\}$.

Ejercicio 7.2. Halle el centro de masa de una placa plana en forma de semianillo superior entre las dos circunferencias centradas en el origen de radios 1 y 2. La densidad en un punto (x, y) de la lámina es proporcional a la distancia del punto al origen.

Ejercicio 7.3. Halle el valor de la integral doble $\iint_D (x^2 + y^2)dA$, donde D es la región acotada por las curvas: $y = x^2 + 1$, $x = y^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ (v. figura 7.10).

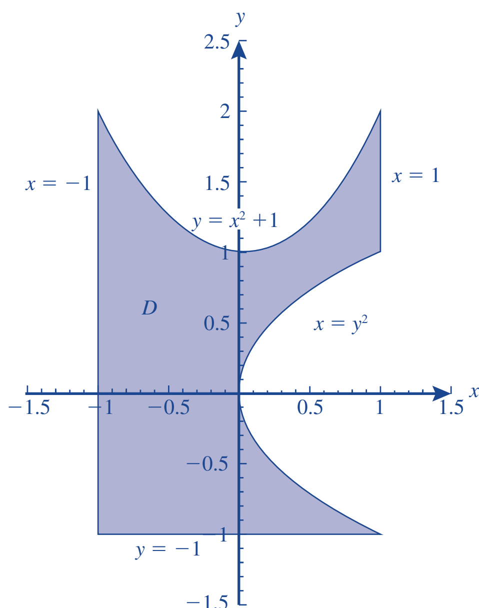


Figura 7.10. Dominio de integración: D

Ejercicio 7.4. Considere la siguiente integral doble iterada:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 2x)^2 \sqrt{x + y}\, dydx.$$

1) Bosqueje la región de integración D en el plano xy.

2) Use la siguiente transformación: $u = x + y$, $v = -2x + y$. Halle el jacobiano: $|J(u, v)| = \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. Si lo estima necesario, puede usar el resultado del álgebra lineal,

$$|J(u, v)| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|}.$$

3) Dibuje la nueva región R de integración en el plano uv.

4) Plantee la nueva integral doble sobre la región R en las variables nuevas u, v. Resuelva esta integral.

Ejercicio 7.5. Use un cambio de variables apropiado para hallar el valor de la integral doble iterada,

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{(y-x)}\, dxdy.$$

Ejercicio 7.6. Se necesita calcular la siguiente integral doble iterada,

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{y/x}\, dxdy.$$

1) Dibuje la región de integración.

2) Cambie el orden de integración y halle el valor de la integral.

Ejercicio 7.7. Halle $\iint_D \arctan(y/x) dA$, donde $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Ejercicio 7.8. Encuentre el valor del volumen que está dentro del cono $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.

Ejercicio 7.9. Calcule la integral doble iterada impropia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dydx.$$

Ejercicio 7.10. Plantee la integral $\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\theta} r\,drd\theta$ en coordenadas cartesianas. ¿Qué representa esta integral?, ¿cuál es su valor? No es necesario hacer la integral.

Ejercicio 7.11. Calcule la integral doble.

1) $\int_1^5 \int_y^5 xy\;dxdy$.

2) $\int_0^{\frac{21\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} 4e^{\operatorname{sen}\theta}\,dr\,d\theta$.

3) $\iint\limits_D x^2y^4\;dA$, donde $D = \{(x, y)\mid 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x\}$.

4) $\iint\limits_D \frac{3y}{x^2+1}\,dA$, donde $D = \{(x, y)\mid 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$.

5) $\iint\limits_D x\cos y\;dA$, donde D es la región acotada por $y = 0$, $y = x^2$, y $x = 8$.

6) $\iint\limits_D y^2dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 2)$, $(2, 1)$ y $(8, 2)$.

7) $\iint\limits_D (6x - y)\;dA$, donde D es la región acotada por el círculo de radio 9 y centro en el origen.

Ejercicio 7.12. Calcule el volumen del sólido;

1) debajo de la superficie $z = x^3 + y^3$ y arriba de la región acotada por $y = x^2$ y $x = y^2$,

2) debajo de la superficie $z = xy$ y arriba de la región triangular con vértices $(2, 5)$, $(4, 5)$ y $(2, 19)$,

3) acotado por la superficie $z = x^2 + y^2 + 3$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 4$,

4) acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 3$,

5) abajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \le 100$,

6) que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y afuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$,

7) de una esfera de radio 4,

8) acotado por el paraboloide $z = 10 - 9x^2 - 9y^2$ y el plano $z = 1$,

9) que se encuentra abajo de la esfera $z^2 + x^2 + y^2 = 16$ y arriba del semicono $\sqrt{x^2 + y^2} = z$;

10) que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y del elipsoide $z^2 + 2x^2 + 2y^2 = 81$.

Ejercicio 7.13. Calcule las siguientes integrales. Si lo estima necesario, cambie el orden de integración.

1) $\int_0^1 \int_{4y}^4 e^{x^2}\, dxdy$.

2) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2\, dxdy$.

3) $\int_0^3 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{2 + \cos^2 x}\, dxdy$.

Ejercicio 7.14. Calcule la integral doble. Use coordenadas polares, si lo estima necesario.

1) $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 y^2 dxdy$,

2) $\int_{\frac{5}{\sqrt{2}}}^5 \int_{\sqrt{25-x^2}}^x (xy)\, dydx + \int_5^{4\sqrt{2}} \int_0^x (xy)\, dydx + \int_{4\sqrt{2}}^8 \int_0^{\sqrt{64-x^2}} (xy)\, dydx$,

3) $\iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 100,\ y \geq 0\}$,

4) $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, donde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq 0\}$,

5) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx$,

6) $\int_{-4}^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dxdy$.

Ejercicio 7.15. Una piscina circular tiene un diámetro de 20 pies. Su profundidad es constante a lo largo de las líneas este-oeste e incrementa de forma lineal desde 3 pies en el extremo sur hasta 7 pies en el extremo norte. Calcule el volumen de la piscina.

Ejercicio 7.16. Una broca cilíndrica de radio 2 es usada para perforar una esfera de radio 4 por el centro. Es decir, al abrir el hueco el eje de la broca pasa por el centro de la esfera. Calcule el volumen del sólido restante en forma de anillo.

Ejercicio 7.17. Una broca cilíndrica de radio 2 es usada para perforar una esfera de radio 4. Al abrir el hueco, la superficie cilíndrica de la broca pasa tangente por el centro de la esfera. Calcule el volumen del sólido restante en forma de arete.

CAPÍTULO 8

Área de superficies e integrales triples

8.1 El área de una superficie

8.1.1 Una fórmula del álgebra lineal

Lema 8.0.1. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \det\begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Para demostrar este lema se pueden usar las expresiones del producto punto y producto cruz en coordenadas, y calcular directamente.

Teorema 8.1. El área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es (fig. 8.1):

$$A(\vec{a},\vec{b}) = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|. \tag{8.2}$$

Demostración. Reemplazando $\vec{c} = \vec{a}$ y $\vec{d} = \vec{b}$ en la fórmula (8.1), obtenemos

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2. \tag{8.3}$$

Ahora, si el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es α, tenemos que,

$$\begin{aligned}\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1-\cos^2\alpha) = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\operatorname{sen}^2\alpha = A(\vec{a},\vec{b})^2.\end{aligned}$$

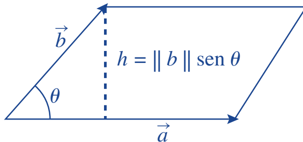


Figura 8.1

Por lo tanto,

$$A(\vec{a},\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2, \tag{8.4}$$

con lo cual podemos concluir que la fórmula (8.2) es verdadera.

8.1.2 El área de una superficie

Sea S una superficie dada la cual es la gráfica de una función derivable $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos f sobre un rectángulo $R \subset D$.

Repitamos la construcción de la integral doble: sean

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}, \tag{8.5}$$

una partición arbitraria del segmento $[a, b]$, y

$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\}, \tag{8.6}$$

una partición arbitraria del segmento $[c, d]$. El conjunto,

$$P_x \times P_y = \{(x_i, y_a) \mid x_i \in P_x, y_a \in P_y\}, \tag{8.7}$$

determina una partición R_{ia}, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq a \leq n$, del rectángulo R en $m \times n$ rectángulos pequeños R_{ia}, donde

$$R_{ia} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{a-1} \leq y \leq y_a\}. \tag{8.8}$$

Sobre un rectángulo R_{ia} la gráfica de la función $f(x, y)$ es aproximadamente una parte S_{ia} del plano tangente en un punto (x_{i-1}, y_{a-1}) sobre R_{ia}. La razón es que para todos los puntos $(x, y) \in R_{ia}$, tenemos que,

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_{i-1}, y_{a-1}) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1})(x - x_{i-1}) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1})(y - y_{a-1}) + O(2), \end{aligned} \tag{8.9}$$

donde $O(2)$ es la suma de términos de orden superior. El plano tangente a la superficie Σ en el punto $(x_{i-1}, y_{a-1}, f(x_{i-1}, y_{a-1}))$ es la gráfica de la función $g(x, y)$, donde,

$$\begin{aligned} g(x, y) = f(x_{i-1}, y_{a-1}) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1})(x - x_{i-1}) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1})(y - y_{a-1}). \end{aligned} \tag{8.10}$$

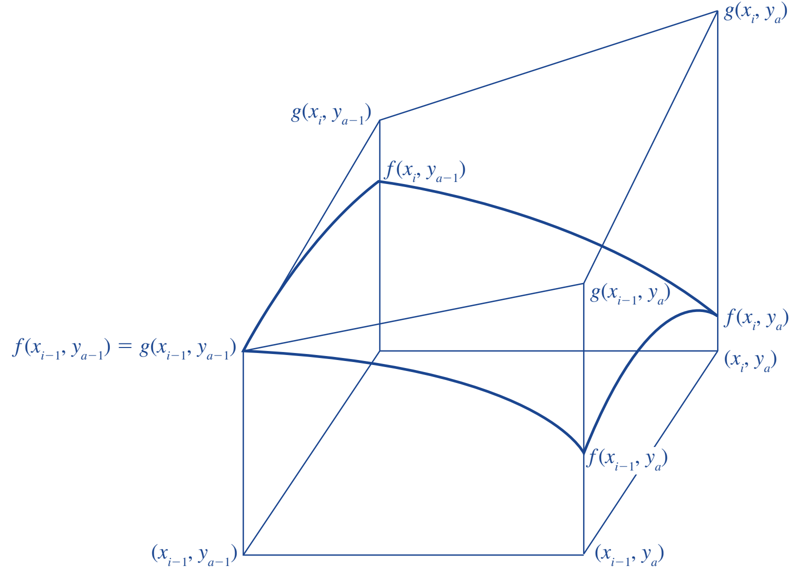


Figura 8.2. Una superficie y su plano tangente sobre el rectángulo R_{ia}

Por lo tanto la parte S_{ia}, del plano tangente, es un paralelogramo determinado por los vectores (v. figura 8.2)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x_i - x_{i-1}, 0, g(x_i, y_{a-1}) - f(x_{i-1}, y_{a-1}))\\ &= \left(\Delta x_i, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1})\Delta x_i\right),\\ \vec{w} &= (0, y_a - y_{a-1}, g(x_{i-1}, y_a) - f(x_{i-1}, y_{a-1}))\\ &= \left(0, \Delta y_a, \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1})\Delta y_a\right).\end{aligned} \tag{8.11}$$

Su producto cruz es

$$\begin{aligned}\vec{v}\times\vec{w} &= \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \Delta_i x & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1})\Delta x_i\\ 0 & \Delta y_a & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1})\Delta y_a\end{bmatrix}\\ &= \Delta_i x\,\Delta_a y\ \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1})\\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1})\end{bmatrix}\\ &= [-\frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1}), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1}), 1]\,\Delta_i x\,\Delta_a y,\end{aligned} \tag{8.12}$$

por lo tanto el área de S_{ia} es,

$$S_{ia} = \left[\sqrt{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1}) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1}) \right)^2 + 1 } \right] \Delta_i x \, \Delta_a y. \tag{8.13}$$

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} A(S) &\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=1}^{m} A(S_{ia}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{a=1}^{m} \left[\sqrt{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1}, y_{a-1}) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, y_{a-1}) \right)^2 + 1 } \right] \Delta_i x \, \Delta_a y. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Ahora, si comparamos este resultado con la definición de integral doble, podemos concluir que la suma de la derecha es una suma de Riemann de la función

$$\sqrt{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 + 1 }, \tag{8.15}$$

sobre el rectángulo R. Este hecho es una base de una prueba del siguiente teorema.

Teorema 8.2. El *área* de la gráfica de una función derivable $f(x, y)$ sobre una región Ω es

$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 + 1 } \, dA. \tag{8.16}$$

Ejemplo 8.1. Sea $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ una función cuya gráfica es un paraboloide elíptico. El área de la gráfica de f sobre el círculo $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es

$$A = \iint_{D} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dA. \tag{8.17}$$

Para evaluar la integral, usamos las coordenadas polares y el teorema del cambio de variables. Entonces, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, la región de integración nueva $D' = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, y

$$A = \iint_{D'} \sqrt{1+r^2}\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{0}}^{1} \sqrt{1+r^2}\, r\, dr d\theta = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi. \tag{8.18}$$

8.2 Integrales triples

8.2.1 Definición de la integral triple

Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u = f(x, y, z)$, una función, y $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ un paralelepípedo rectángulo. La *integral triple* de $f(x, y, z)$ sobre R se define de manera similar a la integral doble.

Sean

$$\begin{aligned} P_x &= \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b\},\\ P_y &= \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\},\\ P_z &= \{p = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = q\}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

particiones de los segmentos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[p, q]$ respectivamente. El conjunto

$$P_x \times P_y \times P_z = \{(x_i, y_a, z_\alpha) \mid x_i \in P_x,\ y_a \in P_y,\ z_\alpha \in P_z\} \tag{8.20}$$

determina una partición $R_{ia\alpha}$, $(1 \le i \le l,\ 1 \le a \le m$, y $1 \le \alpha \le n)$, del paralelepípedo R en $l \times m \times n$ paralelepípedos pequeños donde $R_{ia\alpha} = \{(x, y, z) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{a-1} \le y \le y_a,\ z_{\alpha-1} \le z \le z_\alpha\}$. El volumen del paralelepípedo $R_{ia\alpha}$ es

$$V(R_{ia\alpha}) = (x_i - x_{i-1})(y_a - y_{a-1})(z_\alpha - z_{\alpha-1}) = \Delta x_i\, \Delta y_a\, \Delta z_\alpha. \tag{8.21}$$

En cada paralelepípedo $R_{ia\alpha}$ tomamos un punto $(x^*_{ia\alpha}, y^*_{ia\alpha}, z^*_{ia\alpha})$.

Definición 8.1. Sean $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función, y $R \subset D$ un paralelepípedo. La *integral triple de f sobre el paralelepípedo R* se define como,

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{a=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} f(x^*_{ia\alpha}, y^*_{ia\alpha}, z^*_{ia\alpha}) V(R_{ia\alpha}), \tag{8.22}$$

donde $\Delta x_i, \Delta y_a, \Delta z_\alpha \to 0$ cuando $l, m, n \to \infty$, si el límite existe y es independiente de la elección de los puntos $(x^*_{ia\alpha}, y^*_{ia\alpha}, z^*_{ia\alpha})$ y de la partición del paralelepípedo R.

Nota 8.1. La suma triple $\sum_{i=1}^{l}\sum_{a=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} f(x_{ia\alpha}^{*}, y_{ia\alpha}^{*}, z_{ia\alpha}^{*})V(R_{ia\alpha})$, se llama *suma triple de Riemann*. Podemos usar esta suma para hallar el valor aproximado de la integral triple. Por ejemplo, sean $(\bar{x}_i, \bar{y}_a, \bar{z}_\alpha)$ los centros de los paralelepípedos $R_{ia\alpha}$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z)dV \approx \sum_{i=1}^{l}\sum_{a=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_a, \bar{z}_\alpha)V(R_{ia}), \qquad (8.23)$$

y a esta forma de aproximar la integral triple se le conoce como el *método de los puntos medios*.

Nota 8.2. La definición de la integral triple se puede extender a cualquier región en $\mathbb{R}^3$.

De la definición de integral triple se puede obtener el siguiente teorema.

Teorema 8.3 (Monotonía). Sean $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ dos funciones definidas en una región $D \in \mathbb{R}^3$.

Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, para todo punto $(x, y, z) \in D$,

entonces

$$\iiint_D f(x, y, z)dV \leq \iiint_D g(x, y, z)dV. \qquad (8.24)$$

Teorema 8.4 (Acotación). Sea $f(x, y, z)$ una función definida en una región $D \in \mathbb{R}^3$. Si $m = \min_D f(x, y, z)$, $M = \max_D f(x, y, z)$ y V es el volumen de D, entonces

$$m \cdot V \leq \iiint_D f(x, y, z)dV \leq M \cdot V. \qquad (8.25)$$

Ejemplo 8.2

(**Ejercicio resuelto**). Sea $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ la bola de radio 2 con centro en el origen. Estimaremos la integral

$$\iiint_D (z^2 - 2xy)\,dV. \qquad (8.26)$$

Hallaremos los valores mínimos y máximos de la función $f(x, y, z) = z^2 - 2xy$ sobre D. Para esto encontraremos los extremos de la función $f(x, y, z)$ dentro de la bola D y extremos restringidos de $f(x, y, z)$ sobre la frontera de la bola D (usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, v. teorema 5.3).

En primer lugar encontramos los puntos críticos dentro de la bola D,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z. \end{cases} \tag{8.27}$$

Entonces tenemos un único punto crítico de $f(x, y, z)$ en $A(0, 0, 0)$ y $f(A) = f(0, 0, 0) = 0$ (sin embargo, si aplicamos el teorema 5.2, podemos concluir que la función $F(x, y, z) = z^2 - 2xy$ tiene un punto de silla en A).

Luego usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange. Tomamos la función $f(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$, donde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, entonces el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$ nos da el siguiente sistema de ecuaciones,

$$-y = \lambda x \tag{8.28}$$

$$-x = \lambda y \tag{8.29}$$

$$z = \lambda z \tag{8.30}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0. \tag{8.31}$$

Por la ecuación (8.30) tenemos dos opciones: $z = 0$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 1$, entonces $y = -x$ y $z^2 = 4 - 2x^2$ y la curva Γ dada por las ecuaciones

$$x = t,\ y = -t,\ z = \pm\sqrt{4 - 2t^2} \tag{8.32}$$

es una solución del sistema (8.28)-(8.31). Calculamos los valores de $f(x, y, z)$ en los puntos de la curva Γ,

$$f(t, -t, \pm\sqrt{4 - 2t^2}) = 4 - 2t^2 + 2t^2 = 4. \tag{8.33}$$

Por lo tanto $f(x, y, z) = 4$ para todos los puntos $(x, y, z) \in \Gamma$.

Si $z = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 4$, luego tenemos de las ecuaciones (8.28) y (8.29) que $y/x = x/y$, por lo tanto $y = \pm x$. Entonces tenemos los cuatro puntos $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $D(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $E(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, y calculamos

$$f(B) = f(E) = -4; f(C) = f(D) = 4. \tag{8.34}$$

Comparamos los valores de $f(x, y, z)$ en los puntos A, B, C, D, E y en los puntos de la curva Γ, y como resultado obtenemos que

$$m = \min_{D} f(x, y, z) = -4, \qquad M = \max_{D} f(x, y, z) = 4. \tag{8.35}$$

Sabemos que el volumen de una bola de radio R es $V = 4\pi R^3/3$, entonces el volumen de la bola D es $V = 32\pi/3$, por lo tanto, obtenemos de (8.25) que,

$$-128\pi/3 \leq \iiint_{D} (z^2 - 2xy)dV \leq 128\pi/3. \tag{8.36}$$

Teorema 8.5 (Fubini). Sean $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ p \leq z \leq q\} \tag{8.37}$$

un paralelepípedo tal que $R \subset D$. Entonces,

$$\iiint_{R} f(x, y, z)dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z)\, dz \right] dy \right] dx, \tag{8.38}$$

y además el resultado no depende del orden de las integrales iteradas.

8.2.2 Cálculo de la integral triple sobre regiones sólidas tipos I, II y III

Una *región sólida de integración tipo I* es un sólido E acotado por las gráficas de las funciones $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$, donde $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ sobre una región Ω del plano coordenado xy.

$$\text{Región tipo I} \begin{cases} (x, y) \in \Omega, \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), \end{cases} \tag{8.39}$$

Ω es la proyección de E sobre el plano xy ($z = 0$).

Entonces la *integral triple sobre una región tipo I* se escribe:

$$\iiint_{E} f(x, y, z)dV = \iint_{\Omega \subset (xy)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dA. \tag{8.40}$$

Ejemplo 8.3

(**Ejercicio resuelto**). Sea E un tetraedro acotado por los planos $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ y el plano $4x + 2y + z - 8 = 0$. Los vértices del tetraedro son los puntos $A(1, 0, 4)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(1, 2, 4)$ (v. figura 8.3). Podemos considerar el tetraedro E como una región sólida tipo I acotada por las gráficas de las funciones $z = 8 - 4x - 2y$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$. La región Ω es el triángulo en el plano $z = 0$ acotado por las rectas $x = 1$, $y = 2$, y $4x + 2y - 4 = 0$ (recta de intersección de los planos $z = 4$ y $4x + 2y + z - 8 = 0$).

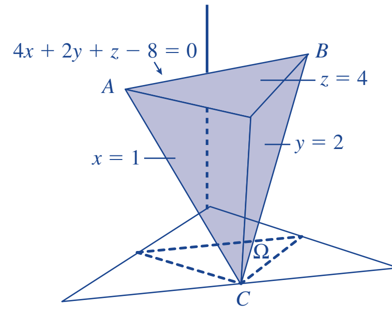


Figura 8.3. Región de integración

Entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_\Omega \left[\int_{8-4x-2y}^{4} f(x,y,z)dz\right] dA$$
$$= \int_0^1 \left[\int_{2-2x}^{2} \left[\int_{8-4x-2y}^{4} f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx. \tag{8.41}$$

Por ejemplo, si $f(x, y, z) = z$, tenemos que

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^1 \left[\int_{2-2x}^{2} \left[\int_{8-4x-2y}^{4} z\ dz\right] dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_{2-2x}^{2} \left(\frac{1}{2}z^2\Big|_{8-4x-2y}^{4}\right) dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_{2-2x}^{2} \left(-8x^2 - 8xy - 2y^2 + 32x + 16y - 24\right) dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 -\frac{16}{3}x^3 + 16x^2\ dx = 4.$$

De la misma manera podemos definir regiones sólidas de integración tipos II y III proyectando el sólido R sobre los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ respectivamente.

Una *región sólida de integración tipo II* es un sólido E acotado por las gráficas de las funciones $x = g_1(y, z)$, $x = g_2(y, z)$, donde $g_1(y, z) \leq g_2(y, z)$ sobre una región Ω en el plano coordenado yz:

$$\begin{cases} (y, z) \in \Omega \\ g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z), \end{cases} \tag{8.42}$$

Ω es la proyección de E sobre el plano $yz(x = 0)$.

Entonces la *integral triple sobre una región tipo II* se escribe:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_{\Omega \subset (yz)} \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right] dA. \tag{8.43}$$

Una *región sólida de integración tipo III* es un sólido E acotado por las gráficas de las funciones $y = g_1(x, z)$, $y = g_2(x, z)$, donde $g_1(x, z) \leq g_2(x, z)$ sobre una región Ω en el plano coordenado xz:

$$\begin{cases} (x, z) \in \Omega, \\ g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z), \end{cases} \tag{8.44}$$

Ω es la proyección de E sobre el plano xz $(y = 0)$.

Entonces la *integral triple sobre una región tipo III* se escribe:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_{\Omega \subset (xz)} \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)dy \right] dA. \tag{8.45}$$

Finalmente una *región sólida de integración tipo IV* es un sólido E el cual es una región tipos I, II y III a la vez.

Ejemplo 8.4

(**Ejercicio resuelto**). Considere el prisma sólido ε con vértices en $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $E(0, 0, 3)$, $F(1, 0, 3)$, $G(1, 2, 1)$, y $H(0, 2, 1)$ mostrado en la figura 8.4.

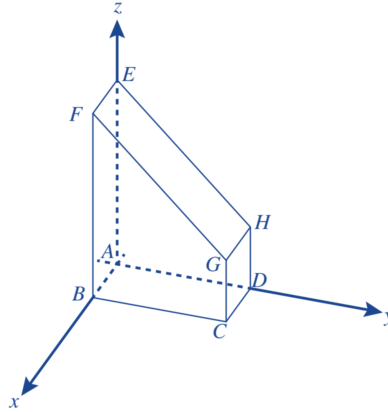


Figura 8.4. Sólido ε

Plantear la integral triple,

$$\iiint_{\varepsilon} f(x, y, z)\, dV, \tag{8.46}$$

considerando ε como una región,

1) Tipo I
2) Tipo II
3) Tipo III

El plano α que pasa por los vértices E, F, G y H tiene ecuación,

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ 1-0 & 0-0 & 3-3 \\ 0-0 & 2-0 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \alpha:\ y+z=3 \tag{8.47}$$

Para cada tipo hay dos posibilidades:

1) Tipo I: Proyectando ε sobre el plano xy ($z = 0$):

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{3-y} f(x, y, z)\, dzdydx, \qquad \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{3-y} f(x, y, z)\, dzdxdy, \tag{8.48}$$

2) Tipo II: Proyectando ε sobre el plano yz ($x = 0$):

$$\int_0^2 \int_0^{3-y} \int_0^1 f(x, y, z)\, dxdzdy,$$
$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 f(x, y, z)\, dxdydz \;+ \int_1^3 \int_0^{3-z} \int_0^1 f(x, y, z)\, dxdydz. \tag{8.49}$$

3) Tipo III: Proyectando ε sobre el plano xz ($y = 0$):

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 f(x, y, z)\, dydzdx \;+ \int_0^1 \int_1^3 \int_0^{3-z} f(x, y, z)\, dydzdx,$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 f(x, y, z)\, dydxdz \;+ \int_1^3 \int_0^1 \int_0^{3-z} f(x, y, z)\, dydxdz. \tag{8.50}$$

Ejemplo 8.5

(**Ejercicio resuelto**). Podemos considerar la región sólida de integración E del ejemplo 8.3 como una región sólida tipo II o tipo III. Por ejemplo, si consideramos E como una región sólida tipo II, tenemos que la región $\Omega \subset (yz)$ (proyección de E sobre el plano $x = 0$) es el triángulo acotado por las rectas $y = 2$, $z = 4$ y $2y + z - 4 = 0$ (proyección de la recta de intersección de los planos $x = 1$ y $4x + 2y + z - 8 = 0$) (v. figura 8.5). Por lo tanto,

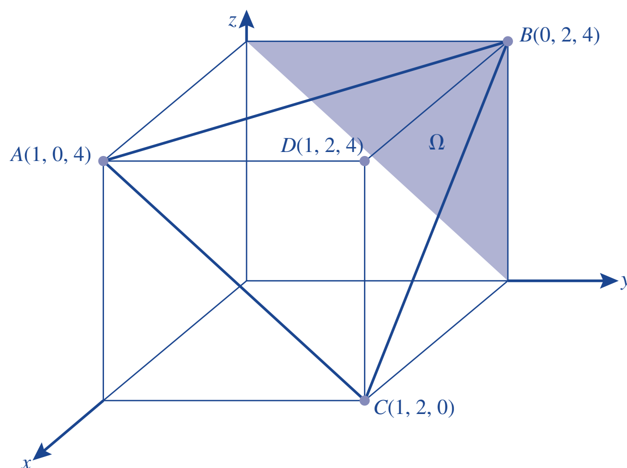


Figura 8.5. Una región sólida tipo II

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^2 \int_{4-2y}^4 \left[\int_{2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z}^1 z\, dx \right] dz \Bigg] dy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_{4-2y}^4 \left(zx\,\Big|_{2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}z}^1 \right) dz \right] dy = \int_0^1 \left[\int_{4-2y}^2 \left(\frac{1}{2}yz + \frac{1}{8}z^2 - z \right) dz \right] dy$$

$$= \int_0^2 -\frac{1}{3}y^3 + 2y^2\, dy = 4.$$

Ejemplo 8.6. Sea S la región sólida acotada por las superficies $z = y^2 + 4$, $y = x^2$, y los planos $y = 0$, $x = 1$ (v. figura 8.6). La región sólida S es tipo I, entonces, para una función $f(x, y, z)$ tenemos que

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_\Omega \left[\int_0^{y^2+4} f(x,y,z)dz \right] dA, \tag{8.51}$$

donde Ω es una región en el plano xy (proyección de S sobre el plano $z = 0$). La región Ω está acotada por la gráfica de la función $y = x^2$ y las rectas $x = 1$ y $y = 0$ (v. figura 8.6). Por lo tanto,

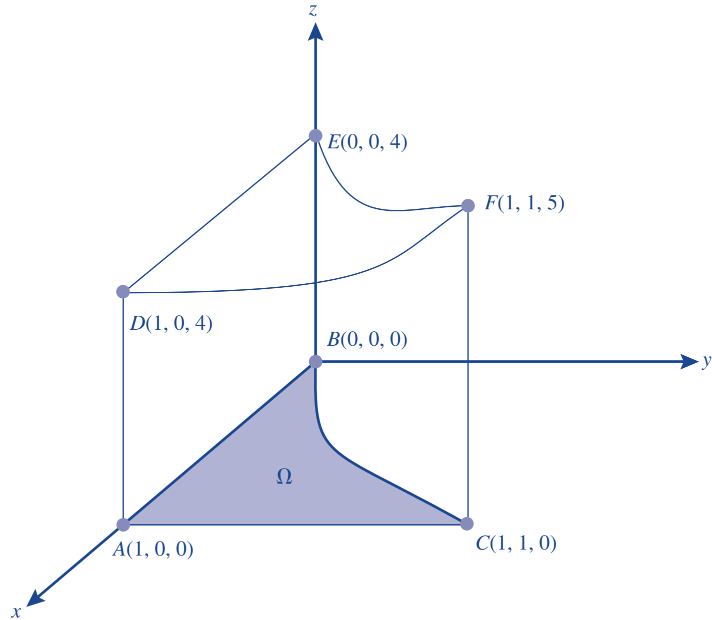


Figura 8.6. Un ejemplo de la región sólida tipo I

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_\Omega \left[\int_0^{y^2+4} f(x,y,z)dz \right] dA$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} \int_0^{y^2+4} f(x,y,z)\, dz \right] dy \Big] dx.$$

Por ejemplo, si $f(x, y, z) = 4xyz$, tenemos que

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^1\left[\int_0^{x^2}\left[\int_0^{y^2+4} 4xyz\ dz\right]dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{x^2}\left(2xyz^2 \Big|_0^{y^2+4}\right)dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^{x^2}\left(2xy\,(y^2+4)^2\right)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[x\left(\frac{1}{3}(y^2+4)^3\Big|_0^{x^2}\right)\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\left((x^4+4)^3-64\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^{13}+12x^9+48x^5\ dx = \frac{649}{210}.$$

Ejemplo 8.7

(**Ejercicio resuelto**). Considere el sólido S mostrado en la figura 8.7.

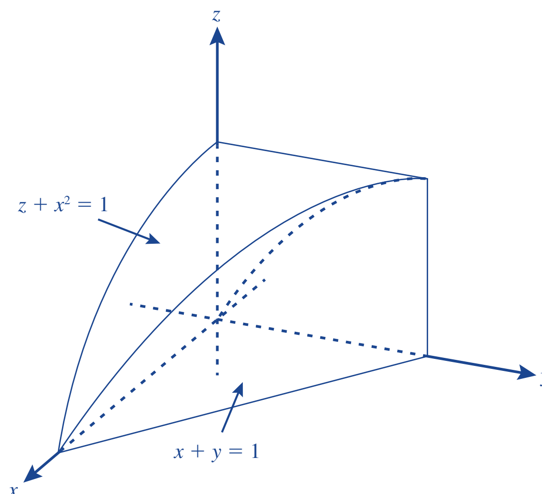


Figura 8.7. Sólido S

Plantear la integral triple cuyo valor representa el volumen del sólido:

1) si el diferencial de volumen es $dV = dzdydx$;

2) si el diferencial de volumen es $dV = dydzdr$;

3) si el diferencial de volumen es $dV = dxdydz$.

Para plantear en los órdenes de integración pedidos, proyectamos el sólido S sobre cada plano coordenado y así podemos determinar los límites de las dos integrales exteriores.

1) La proyección de S sobre el plano xy es el triángulo Σ_z definido por las desigualdades,

$$\sum_z = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x. \end{cases}$$

Para determinar los límites de la integral faltante interior, trazamos imaginariamente un eje con dirección del eje z que pase por el triángulo Σ_z y tal que atraviese el sólido S. Las superficies por donde entra este eje y donde sale al atravesar S, definen los límites de la tercera integral. Por lo tanto,

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} dzdydx\,.$$

2) De manera similar la proyección de S sobre el plano xz es la figura plana Σ_y definida por las desigualdades,

$$\sum_y = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2. \end{cases}$$

Para determinar los límites de la integral faltante interior trazamos imaginariamente un eje con dirección del eje y y que pase por Σ_y tal que atraviese el sólido S. Las superficies por donde entra este eje y y por donde sale al atravesar a S definen los límites de la tercera integral. Por lo tanto,

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-x} dydzdx.$$

3) La proyección de S sobre el plano yz es el cuadrado Σ_x definido por las desigualdades:

$$\sum_x = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Este cuadrado está dividido por la curva c, que es la proyección de la intersección de las superficies $x + y = 1$ y $x^2 + z = 1$ (fig. 8.8). Para encontrar la ecuación de la curva en el plano yz combinamos las dos ecuaciones de las superficies eliminando la variable x. La ecuación de c es $z = 1 - (1 - y)^2$ y es un pedazo de parábola que divide el cuadrado Σ_x en dos partes A y B, $\Sigma_x = A \cup B$.

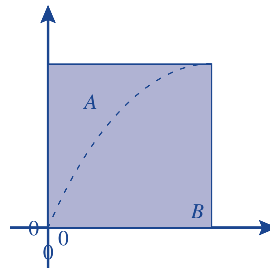


Figura 8.8

Debemos entonces escribir dos integrales triples y el volumen del sólido es la suma de estas dos integrales, una integral que se proyecta en la región A y otra integral que se proyecta sobre la región B. Los límites de las integrales exteriores estarán determinados por A y B.

$$V = \iint_A \left[\int dx \right] dydz + \iint_B \left[\int dx \right] dydz,$$

$$A = \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - \sqrt{1-z} \end{cases} \quad ; \quad B = \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 1 - \sqrt{1-z} \le y \le 1. \end{cases}$$

Para determinar los límites de la integral faltante interior trazamos imaginariamente un eje con dirección del eje x que pase una vez por A y otra vez por B tal que atraviese el sólido S. Entonces,

$$V = \iiint_S dV = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\sqrt{1-z}} \left[\int_0^{\sqrt{1-z}} dx \right] dy \right] dz + \int_0^1 \left[\int_{1-\sqrt{1-z}}^{0} \left[\int_0^{1-y} dx \right] dy \right] dz$$

8.2.3 Aplicaciones de la integral triple

A continuación daremos algunas aplicaciones de la integral triple de una función $f(x, y, z)$ definida sobre un sólido E,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV. \tag{8.52}$$

Volumen de un sólido

Teorema 8.6. El volumen de un sólido E en $\mathbb{R}^3$ es

$$V(E) = \iiint_E dV. \tag{8.53}$$

Es decir, si $f(x, y, z) = 1$ en la expresión (8.52), entonces la integral triple es el volumen del sólido E.

Ejemplo 8.8. (**Ejercicio resuelto**). Hallemos el volumen de una esfera B de radio R con centro en el origen. Podemos considerar la esfera como una región sólida tipo I (v. figura 8.9).

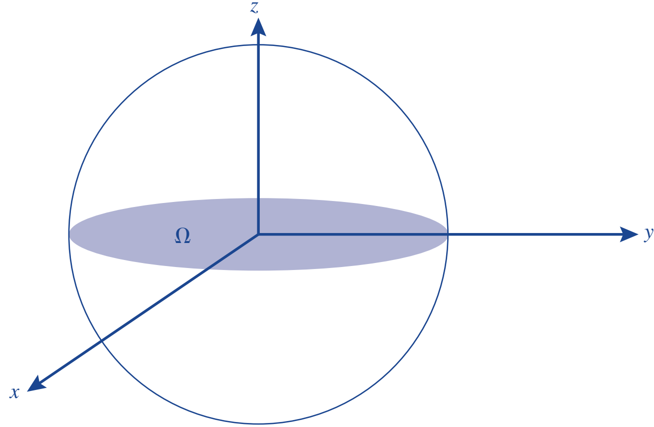


Figura 8.9. Una región esférica sólida

La ecuación de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, entonces la esfera es una región sólida entre las gráficas de las funciones $g_1(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ y $g_r(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ definidas sobre el círculo $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Por lo tanto el volumen de la esfera B es

$$V = \iiint_B 1\, dV = \iint_\Omega \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz dA = \iint_\Omega 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dA. \tag{8.54}$$

Usando coordenadas polares (r, θ) para evaluar la última integral obtenemos,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B dV = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R 2\sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr \right] d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Valor promedio de una función

Con la integral triple podemos hallar el *valor promedio de una función* $f(x, y, z)$ sobre una región sólida E:

$$\bar{f} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \frac{\iiint_E f(x, y, z)\, dV}{\iiint_E dV}. \tag{8.55}$$

Ejemplo 8.9. Sea E un cono con la base $B = \{(x, y, z) \mid y = 0,\ x^2 + z^2 \leq 1\}$ y vértice en $(0, 2, 0)$, y sea $f(x, y, z) = y$ (v. figura 8.10).

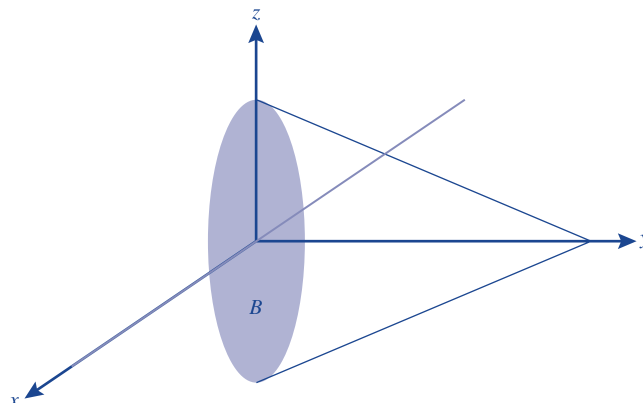


Figura 8.10. Un cono con la base B

Encontraremos el valor promedio de $f(x, y, z)$ sobre la región sólida E.

E es una región sólida tipo III entre las gráficas de las funciones $y = g_1(x, z) = 0$ y $y = g_2(x, z) = 2 - 2\sqrt{x^2 + z^2}$ sobre el círculo B. En primer lugar encontramos el volumen de E:

$$V(E) = \iiint_E 1\, dV = \iint_B \left[\int_0^{2-2\sqrt{x^2+z^2}} dy \right] dA = \iint_B 2 - 2\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \text{(usamos coordenadas polares } (r, \phi)\text{: } x = r\cos\phi,\ z = r\operatorname{sen}\phi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 2(1-r)r\, dr \right] d\phi = 2\pi\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Ahora hallamos la integral de $f(x, y, z) = y$ sobre E:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_E y\, dV = \iint_B \left[\int_0^{2-2\sqrt{x^2+z^2}} y\, dy \right] dA$$

$$= \iint_B \frac{1}{2}(2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})^2\, dA$$

$$= \text{(usamos coordenadas polares } (r, \phi)\text{: } x = r\cos\phi,\ z = r\operatorname{sen}\phi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 2(1-r)^2 r\, dr \right] d\phi = 2\pi\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\pi.$$

Por lo tanto,

$$\bar{f} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) dV = \frac{1}{2}. \tag{8.56}$$

8.3 Ejercicios del capítulo 8

Ejercicios recomendados: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17.

Ejercicio 8.1. Hallar el área de la parte de la superficie,

1) del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

2) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ acotado por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b \leq a)$,

3) del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ entre las superficies $y^2 = ax$ y $x = a$ (parte interior),

4) del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ entre el plano xy $(z = 0)$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$,

5) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5z$ que se encuentra dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$,

6) del paraboloide $y = x^2 + z^2$ entre los planos $y = 0$ y $y = 36$,

7) del plano $z = 1 + 3x + 7y$ que se encuentra sobre el rectángulo $[0, 6] \times [3, 9]$,

8) del plano $2x + 8y + z = 4$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$,

9) del plano $12x + 4y + z = 12$ que se encuentra en el primer octante,

10) de la superficie $y^2 + z^2 = 49$ que se encuentra sobre el rectángulo en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 6)$ y $(8, 6)$,

11) de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el plano xy,

12) de la superficie $z = xy$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$,

13) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra sobre el plano $z = 2$.

Ejercicio 8.2. Hallar el área de la superficie que es la gráfica de la función $z = f(x, y) = 2\cosh x + \sqrt{3}y$ sobre el rectángulo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Ejercicio 8.3. Probar que las superficies que son las gráficas de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = x^2 - y^2$ y $h(x, y) = 2xy$ sobre la misma región D tienen la misma área.

Ejercicio 8.4. Probar que el área de la superficie del semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $(z \geq 0)$ encima de una región Ω en el plano xy con área R es igual a $\sqrt{2}R$.

Ejercicio 8.5. Hallar el área de la superficie

$$z = x^2 + 2y, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4.$$

Ejercicio 8.6. Hallar el área de la superficie que es la gráfica de $z = x^2 - y^2$ sobre el círculo $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ejercicio 8.7. Considere el cubo en $\mathbb{R}^3$, $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y la función $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$. Demostrar que

$$0 \leq \iiint_D \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)dV \leq 1.$$

Ejercicio 8.8. Considere el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$, $D = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ y la función $f(x, y, z) = e^{-x^2 - y - z^2}$. Demostrar que

$$6e^{-14} \leq \iiint_D e^{-x^2-y^2-z^2}\, dV \leq 6.$$

Ejercicio 8.9. Hallar el valor de la integral iterada.

1) $\int_1^3 \int_0^2 \int_0^{1-z^2} 4ze^{3y}\, dx\, dz\, dy$,

2) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y+z+1}\, dx\, dy\, dz$,

3) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\, dz\, dy\, dx$,

4) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}\, dz\, dy\, dx$;

5) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\, dz\, dy\, dx$.

Ejercicio 8.10. Exprese la integral

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

como una integral iterada de la forma

$$\int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

donde E es

1) el sólido acotado por $x^2 + z^2 = 9$, $y = 0$ y $y = 5$,

2) el sólido acotado por $x^2 = 4 - y$, $z = 0$, $y = z$,

3) el tetraedro acotado por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

4) el cono acotado por $x^2 + y^2 = z^2/c^2$, $z = c$;

5) el sólido acotado por $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Ejercicio 8.11. Evaluar la integral triple

1)

$$\iiint_E (2x + 5y)\, dV,$$

donde E es el sólido acotado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $y = x$, $x = z$ y $z = 0$;

2)

$$\iiint_E z\, dV,$$

donde E es el sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 16$ y los planos $x = 0$, $y = \frac{4}{5}x$ y $z = 0$;

3)

$$\iiint_E 5x\, dV,$$

donde $E = \{(x, y, z) | 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2},\ 0 \le z \le y\}$,

4)

$$\iiint_E yz \cos\left(x^5\right)\, dV,$$

donde $E = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 3x,\ x \le z \le 5x\}$,

5)

$$\iiint_E 3xy\, dV,$$

donde E es el sólido que yace debajo del plano $z = 4 + x + y$ y arriba de la región en el plano xy acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$;

6)

$$\iiint_E z dV,$$

donde E se encuentra sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del plano $z = 6y$.

Ejercicio 8.12. Hallar el volumen

1) del sólido acotado por el cilindro $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $x + z = 1$;

2) del sólido que el cilindro $r = 3\cos\theta$ corta de la esfera de radio 3 centrada en el origen.

Ejercicio 8.13. Hallar la masa

1) del cubo $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$ con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

2) del sólido con densidad constante igual a 2, acotado por el paraboloide $z = 5x^2 + 5y^2$ y el plano $z = 4$.

Ejercicio 8.14. Un leñador corta una cuña de forma cilíndrica, la cual está acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $x + z + 2 = 0$. Hacer el bosquejo de la cuña y calcular su volumen.

Ejercicio 8.15. Sean Π el tetraedro con vértices en los puntos $A(0, 0, 3)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(1, 0, 0)$, y la función $f(x, y, z) = 2x + y - 2$.

1) Bosquejar el tetraedro Π.

2) Hallar el volumen de Π.

3) Hallar el valor de la integral triple de la función sobre el tetraedro.

Ejercicio 8.16. Sean Π el tetraedro con vértices en los puntos: $A(1, 2, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(1, 0, 0)$, y la función $f(x, y, z) = e^z$.

1) Bosquejar el tetraedro Π.

2) Hallar el volumen de Π.

3) Hallar el valor de la integral triple de la función sobre el tetraedro.

Ejercicio 8.17. Hallar el volumen del sólido acotado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $x = 1$, $z = y$ en el primer octante.

Ejercicio 8.18. Considere el paralelepípedo Π con vértices en:

$A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$, $D(2, 0, 0)$,
$A'(0, 1, 3)$, $B'(0, 2, 3)$, $C'(2, 2, 3)$, $D'(2, 1, 3)$.

1) Hallar su volumen usando una sola integral simple.

2) Hallar su volumen usando una sola integral doble.

3) Hallar su volumen usando una sola integral triple.

4) Hallar la masa del paralelepípedo si la densidad de masa en un punto $p(x, y, z) = \frac{1}{5-z}$.

CAPÍTULO 9 Cambio de variables en integrales triples

9.1 Cambio de variables

Definición 9.1 (Jacobiano). Sea T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(u^1, \ldots, u^n) = (x^1, \ldots, x^n)$, una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo definida por:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2, \ldots, u^n) \\ x^2 = x^2(u^1, u^2, \ldots, u^n) \\ \vdots \\ x^n = x^n(u^1, u^2, \ldots, u^n) \end{cases} \tag{9.1}$$

Si Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y T es derivable en Ω, es decir, $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^j}$ existen y son continuas para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces el jacobiano se define como el determinante,

$$J = \det \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial u^n} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^2} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^n} \end{vmatrix} \tag{9.2}$$

Ejemplo 9.1. Consideremos la aplicación lineal T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = T(\vec{u}) = A\,\vec{u}$, donde A es una matriz 3×3.

$$(x, y, z) = T(u, v, w) = \begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, \\ y = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, \\ z = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w. \end{cases} \tag{9.3}$$

El jacobiano de T es $J = \det \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det [a_{ij}]$. El jacobiano $J \neq 0$ si y sólo si la aplicación T es biyectiva, porque J es el determinante de la matriz asociada a la aplicación lineal T.

La aplicación lineal T, con jacobiano $J \neq 0$ lleva rectas en rectas, rectas paralelas en rectas paralelas, planos en planos y planos paralelos en planos paralelos. Por lo tanto, si tenemos un paralelepípedo R, entonces $T(R)$ es en general otro paralelepípedo. Los volúmenes $V(R)$ y $V(T(R))$ están relacionados por $V(T(R)) = |J|V(R)$.

Definición 9.2. Una *transformación* de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $T: U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciable en U tal que,

1. T es biyectiva;
2. $J(T) \neq 0$ en todo U.

Ejemplo 9.2. (**Ejercicio resuelto**). Consideremos la aplicación T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = T(\vec{u}) = A\vec{u} + \vec{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

El jacobiano de T es $J = -3$ y la aplicación inversa es

$$\vec{u} = T^{-1}(\vec{x}) = B\vec{u} + \vec{d}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

Entonces la aplicación T es una transformación de $\mathbb{R}^3$.



Así como definimos las integrales dobles y triples, de manera análoga se puede definir la integral múltiple de una función continua $f = f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ sobre una región cerrada R de $\mathbb{R}^n$, la cual se denota por

$$\int_R f(x^1, x^2, \cdots, x^n) dV_n(\vec{x}) = \int_R f(x^1, x^2, \cdots, x^n) dx^1 dx^2 \cdots dx^n. \tag{9.6}$$

Teorema 9.1 (cambio de variables en integrales múltiples). Sean Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = T(\vec{u})$ una transformación de $\mathbb{R}^n$, y $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ una función continua en una región cerrada R contenida en Ω. Entonces,

$$\int_{R = T(R')} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1, \cdots dx_n = \int_{R'} f x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_n) \, |J| du_1, \cdots du_n, \tag{9.7}$$

donde $|J|$ es el valor absoluto del jacobiano (9.2).

9.1.1 Fórmula para cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas en una integral triple

El cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas es,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\operatorname{sen}\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{9.8}$$

por lo tanto el jacobiano es

$$J = \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{9.9}$$

Si R es un sólido en $\mathbb{R}^3$ y R' es

$$R' = \{(r,\theta,z) \mid (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \in R\}, \tag{9.10}$$

entonces la fórmula de *cambio de variables* de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas en una integral triple es

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{R'} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,rdrd\theta dz \tag{9.11}$$

¿Cuándo usar coordenadas cilíndricas en una integral triple? La respuesta a esta pregunta depende de f y de la región de integración R.

1) Si la función de integración f está dada en coordenadas cartesianas y tiene una expresión que tiene la suma de cuadrados de al menos dos de sus variables, por ejemplo $x^2 + y^2$, o, $y^2 + z^2$, es recomendable usar coordenadas cilíndricas.

2) Si la región de integración R está acotada por alguna superficie con ecuación que tiene la suma de cuadrados de al menos dos de sus variables, por ejemplo $x^2 + y^2$, o, $x^2 + z^2$, es recomendable usar coordenadas cilíndricas. Por ejemplo, un pedazo de cilindro, la parte interior de un cono debajo de un plano, una esfera centrada en el origen.

Ejemplo 9.3. (**Ejercicio resuelto**). Hallar el centro de masa de un sólido con densidad constante δ que se encuentra acotado por el disco Ω: $z^2 + y^2 \leq 4$ (en el plano $x = 0$) y el paraboloide $x = 4 - z^2 - y^2$. La región de integración, figura 9.1

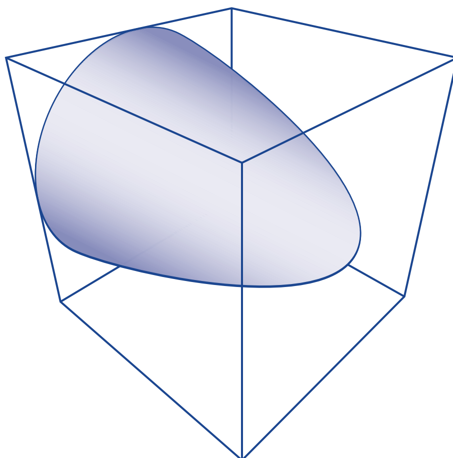


Figura 9.1 Paraboloide

expresada en coordenadas cartesianas es:

$$R = \begin{cases} -2 \le z \le 2, \\ -\sqrt{4-z^2} \le y \le \sqrt{4-z^2}, \\ 0 \le x \le 4 - y^2 - z^2. \end{cases} \tag{9.12}$$

Como la región está acotada por una función que tiene en su expresión el término $z^2 + y^2$ usamos el siguiente cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} z = r\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ x = x. \end{cases} \tag{9.13}$$

A este cambio de coordenadas le corresponde el jacobiano con valor absoluto igual a r y límites

$$R = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le r \le 2, \\ 0 \le x \le 4 - r^2. \end{cases} \tag{9.14}$$

Por lo tanto tenemos

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} \delta r dx dr d\theta = 8\pi\delta \tag{9.15}$$

Como la densidad δ es constante, entonces por simetría de la figura tenemos $\bar{y} = \bar{z} = 0$, y

$$M_{yz} = \iiint_R x\delta\, r dx dr d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}. \tag{9.16}$$

Es decir, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (4/3, 0, 0)$.



Ejemplo 9.4. (**Ejercicio resuelto**). Considere el sólido S acotado por las superficies

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4, \\ x + z = 8, \\ x = 0. \end{cases} \tag{9.17}$$

Calcule el volumen del sólido (v. figura 9.2).

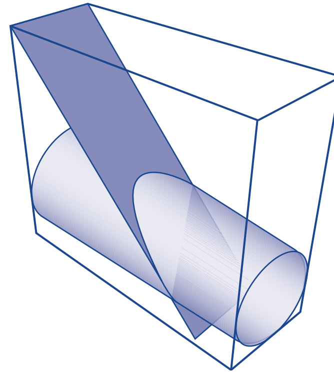


Figura 9.2. Cilindro truncado

Cambiando las coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas tenemos

$$\begin{cases} x = x, \\ y = r\cos\theta, \quad \Rightarrow |J| = r. \\ z = r\,\mathrm{sen}\theta, \end{cases} \tag{9.18}$$

La región ocupada por S está descrita como

$$S = \begin{cases} -2 \le y \le 2, \\ -\sqrt{4-y^2} \le z \le \sqrt{4-y^2}, \\ 0 \le x \le 8 - z, \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le r \le 2, \\ 0 \le x \le 8 - r\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \tag{9.19}$$

$$V(S) = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{8-r\,\mathrm{sen}\,\theta} r\, dx dr d\theta = 32\pi. \tag{9.20}$$

9.1.2 Fórmula para cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas

El cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas es

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \\ z = \rho \cos\phi, \end{cases} \tag{9.21}$$

por lo tanto el jacobiano es

$$\begin{aligned} J = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Si R es un sólido en $\mathbb{R}^3$ y R' es

$$R' = \{(\rho, \phi, \theta) \mid (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi) \in R\}, \tag{9.23}$$

entonces la fórmula de *cambio de variables* de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas en una integral triple es:

$$\begin{aligned} &\iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz = \\ &\iiint_{R'} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned} \tag{9.24}$$

¿Cuándo usar coordenadas esféricas en una integral triple? La respuesta a esta pregunta depende de dos cosas, una es la función que se va a integrar, f, y otra es la región de integración. Por lo tanto, podemos decir que si la función de integración está dada en coordenadas cartesianas y tiene una expresión que involucra $x^2 + y^2 + z^2$, es recomendable usar coordenadas esféricas. Pero como se dijo antes también depende de la región de integración. En caso de que la región de integración sea un pedazo de esfera (centrada en el origen) o la parte interior de un cono dentro de una esfera (esfera centrada en el origen y cono con vértice en el origen) es también recomendable usar coordenadas esféricas.

Ejemplo 9.5. Encontrar el momento de inercia sobre el eje z del sólido con densidad de masa uniforme e igual a 1, acotado por la esfera unitaria centrada en el origen y el cono con vértice en el origen, eje de simetría, el eje z, y que forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje z (v. figura 9.3).

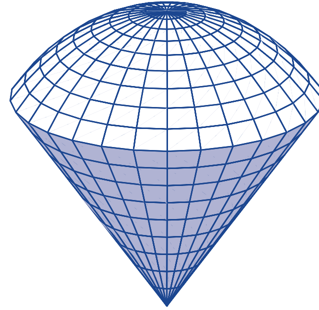


Figura 9.3. Ejemplo 9.5

En coordenadas esféricas la esfera tiene ecuación $\rho = 1$ y el cono $\phi = \pi/3$. El sólido R mostrado en la figura 9.3 en coordenadas esféricas es,

$$R = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{9.25}$$

Por lo tanto,

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) dV. \tag{9.26}$$

En coordenadas esféricas $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi)(\rho^2 \operatorname{sen} \phi)\, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (\rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi)\, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{12}. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Ejemplo 9.6. Calcular la masa del sólido acotado por dos esferas concéntricas de radios 1 y 2 respectivamente en el primer octante. La función de densidad puntual de masa igual a la distancia al centro de las esferas.

Tomamos el sistema coordenado con origen en el centro de las esferas. De esta manera, usando coordenadas esféricas tenemos,

$$m = \iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{15\pi}{8} \tag{9.28}$$

9.2 Ejercicios del capítulo 9

Ejercicios recomendados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13.

Ejercicio 9.1. Considere la figura 9.4.

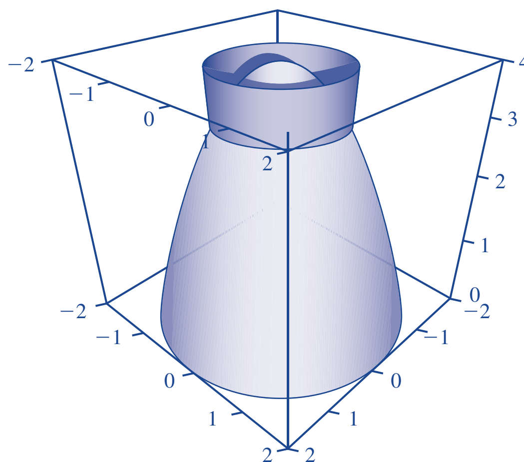


Figura 9.4. Ejercicio 9.1

1) Escriba las ecuaciones del cilindro y el paraboloide mostrados en la figura.

2) Plantee la integral en coordenadas cartesianas para calcular el volumen del sólido que está debajo del paraboloide, entre el cilindro y encima del plano $z = 0$.

3) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido que está debajo del paraboloide, entre el cilindro y encima del plano $z = 0$.

4) Halle el valor del volumen.

Ejercicio 9.2. Considere el sólido acotado por el cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$, fig. 9.5.

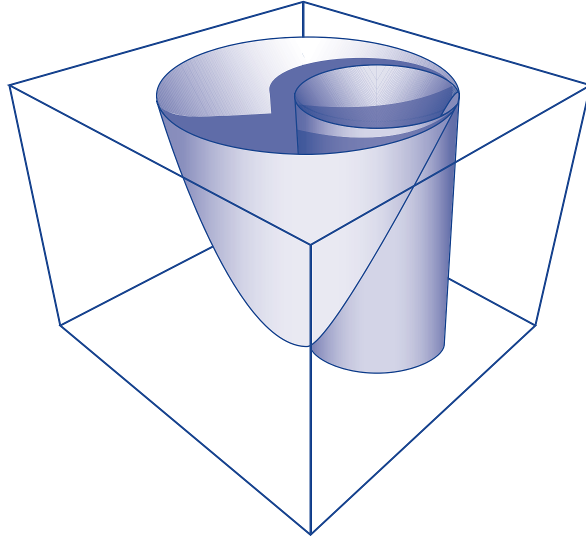


Figura 9.5. Ejercicio 9.2

1) Plantee la integral en coordenadas cartesianas para calcular el volumen del sólido que está debajo del paraboloide, entre el cilindro y encima del plano $z = 0$.

2) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido que está debajo del paraboloide, entre el cilindro y encima del plano $z = 0$.

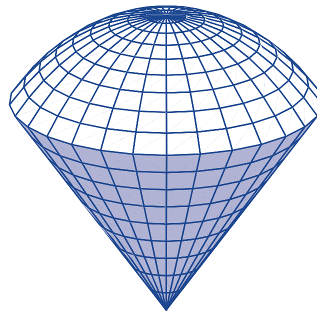
3) Halle el valor del volumen.

Ejercicio 9.3. Considere el sólido dentro del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$, fig. 9.6.

1) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen.

2) Plantee la integral en coordenadas esféricas para calcular el volumen.

3) Halle el valor del volumen.



Flgura 9.6. Ejercicio 9.3

Ejercicio 9.4. Considere el sólido debajo del paraboloide: $z = x^2 + y^2$ y encima del disco en el plano $z = 0$: $x^2 + y^2 \leq 4$, fig. 9.7.

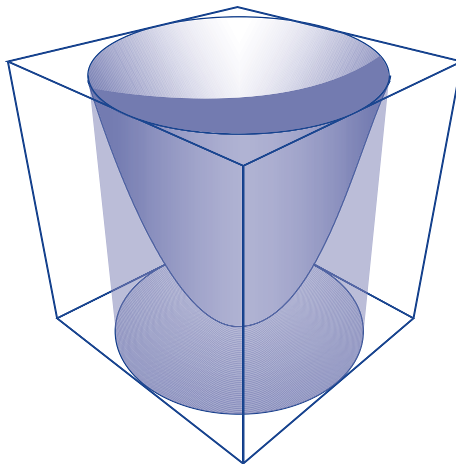


Figura 9.7. Ejercicio 9.4

1) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen.

2) Halle el valor del volumen.

Ejercicio 9.5. Considere el sólido encima del paraboloide: $z = x^2 + y^2$ y debajo del disco en el plano $z = 4$: $x^2 + y^2 \leq 4$.

1) Plantee la integral en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen.

2) Halle el valor del volumen.

Ejercicio 9.6. Considere el sólido E que está acotado por:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 1 - y$$

y está en el primer octante.

1) Exprese la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)dV$ en coordenadas cartesianas.
2) Exprese la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)dV$ en coordenadas cilíndricas.
3) Halle el volumen de E.

Ejercicio 9.7. Considere el sólido E acotado por:

$$x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0, \quad y = 6.$$

1) Exprese la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)dV$ en coordenadas cartesianas.
2) Exprese la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)dV$ en coordenadas cilíndricas.
3) Halle el volumen de E.

Ejercicio 9.8. Exprese la integral triple $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)dydzdx$ en coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 9.9. Calcular la integral triple

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

1) donde $f = 2x + 5y$ y E es el sólido acotado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $y = x$, $x = z$ y $z = 0$;
2) donde $f = z$ y E es el sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 16$ y los planos $x = 0$, $y = \frac{4}{5}x$, $z = 0$, en el primer octante;
3) donde $f = z$ y E es el sólido que se encuentra sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del plano $z = 6y$;
4) donde $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ y E es el sólido acotado por el cilindro $4 = x^2 + y^2$ y los planos $z = -5$ y $z = 7$;
5) donde $f = y$ y E es el sólido que se encuentra entre los cilindros $1 = x^2 + y^2$ y $2 = x^2 + y^2$ sobre el plano xy y debajo del plano $z = x + 2$;

6) donde $f = x^2$ y E es el sólido que se encuentra dentro del cilindro $25 = x^2 + y^2$ sobre el plano xy y debajo del cono $z^2 = 36x^2 + 36y^2$.

Ejercicio 9.10. Calcular el volumen del sólido restante que se obtiene de una bola de radio 3 centrada en el origen cuando se le extrae la parte del cilindro $r = 3\cos\theta$.

Ejercicio 9.11. Calcular la masa del sólido con densidad constante igual a 2, acotado por el paraboloide $z = 5x^2 + 5y^2$ y el plano $z = 4$.

Ejercicio 9.12. Use coordenadas esféricas para calcular el valor de la integral triple

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV$$

1) donde $f = x^2 + y^2 + z^2$ y B es la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$;

2) donde $f = xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}$ y B es el sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el primer octante;

3) donde $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y B es el sólido acotado por el cono $\phi = \frac{\pi}{6}$ y la esfera $\rho = 3$.

Ejercicio 9.13. Use coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ arriba del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicio 9.14. Calcule el volumen del sólido que se encuentra en el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ arriba del plano xy.

Ejercicio 9.15. Integre la función

$$f(x, y, z) = \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sobre la bola unitaria.

Ejercicio 9.16. Sea E el sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que tiene una densidad proporcional a la distancia al origen. Calcule la masa de E.

Ejercicio 9.17. Evalúe la siguiente integral triple:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz dx dy\, .$$

Ejercicio 9.18. Evalúe la integral

$$\iiint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dzdydx,$$

donde E es el sólido debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y encima del cono $z^2=x^2+y^2$ para $z\geq 0$.

Ejercicio 9.19. Calcule el valor de la integral impropia,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-x^2-y^2-z^2}\,dzdydx.$$

Ejercicio 9.20. Calcule el valor de la integral

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}dzdxdy.$$

CAPÍTULO

10 Campos vectoriales e integral de línea

10.1 Campos vectoriales

En física decimos que si a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le asignamos un número, tenemos un *campo escalar*, o si le asignamos un vector, un *campo vectorial*. La temperatura en el espacio y la temperatura en una placa son ejemplos de campos escalares. El campo de velocidades del flujo de un fluido, el campo eléctrico, el campo magnético, el campo de fuerzas debido a la gravedad y en general el campo de fuerzas ejercidas por un cuerpo hacia otro son ejemplos de campos vectoriales, fig. 10.1.

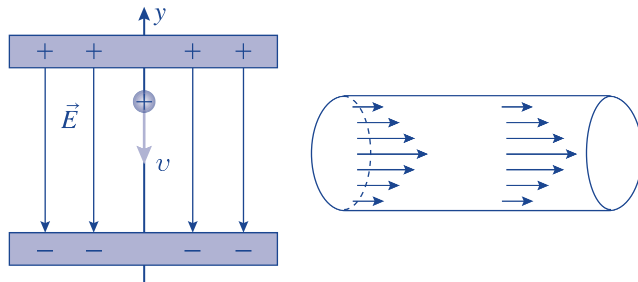


Figura 10.1. El campo eléctrico entre dos placas paralelas cargadas y el campo de velocidades del flujo del agua a través de una tubería

Definición 10.1. Sea D una región abierta en el espacio $\mathbb{R}^n$. Un campo vectorial en D es una aplicación $\vec{F}$ que a cada punto $p \in D$ le asigna un vector $\vec{F}(p)$. Si denotamos por $\vec{x}$ el vector posición de p, entonces podemos describir el campo vectorial por la función vectorial

$$\vec{F}\colon D \to \mathbb{R}^n,$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})). \qquad (10.1)$$

Las funciones $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ se llaman las *componentes* del campo $\vec{F}$. Si las componentes f_i son derivables decimos que el campo vectorial $\vec{F}$ es derivable.

10.1.1 Representación gráfica de un campo vectorial

Para dibujar un campo vectorial $\vec{F}$ en el plano o en el espacio, dibujamos en algunos puntos p los vectores $\vec{F}(p)$ asignados por el campo.

Ejemplo 10.1. El valor del campo vectorial $v(x, y) = (2y, -x) = 2y\vec{i} - x\vec{j}$ en el punto $A(2, 1)$ es $v(2, 1) = (2, -2)$ (v. figura 10.2).

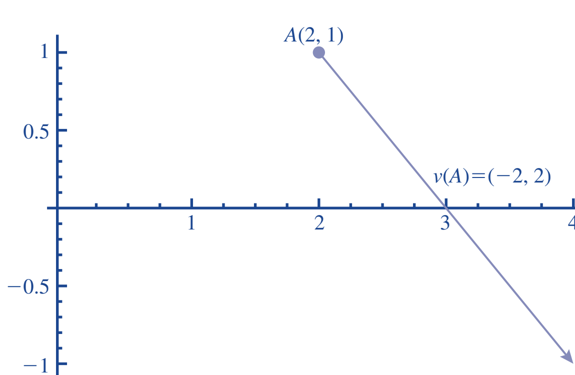


Figura 10.2. El valor del campo vectorial $v(x, y) = (2y, -x) = 2y\vec{i} - x\vec{j}$ en el punto $A(2, 1)$ es $v(2, 1) = (2, -2)$

Ejemplo 10.2. La figura 10.3 muestra los valores del campo vectorial $v(x, y) = (2y, -x) = 2y\vec{i} - x\vec{j}$ en nueve puntos con coordenadas (x, y) donde $x = -1, 0, 1$ y $y = -1, 0, 1$.

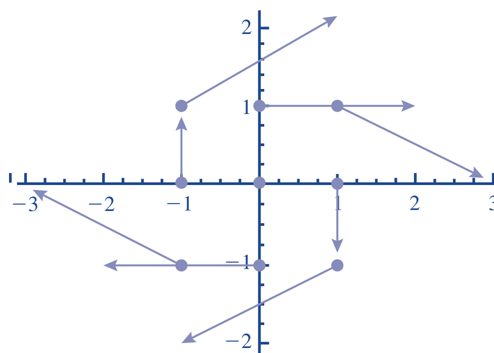


Figura 10.3. Valores del campo vectorial $v(x, y) = (2y, -x) = 2y\vec{i} - x\vec{j}$ en nueve puntos

♦

Ejemplo 10.3. Sea $\vec{F}(x, y) = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ un campo vectorial. Para dibujar el valor de este campo en muchos puntos usamos el software sage (v. figura 10.4). Sage muestra la dirección y sentido correctamente en cada punto, pero su magnitud está reescalada, es decir, obtenemos vectores cuya magnitud es proporcional a la real.

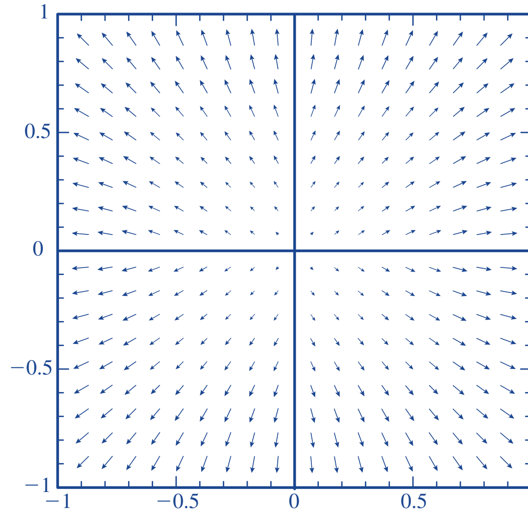


Figura 10.4. El dibujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Las longitudes de vectores del campo están reescaladas

Ejemplo 10.4. Sea $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ un campo vectorial. La figura 10.5 muestra este campo vectorial en muchos puntos.

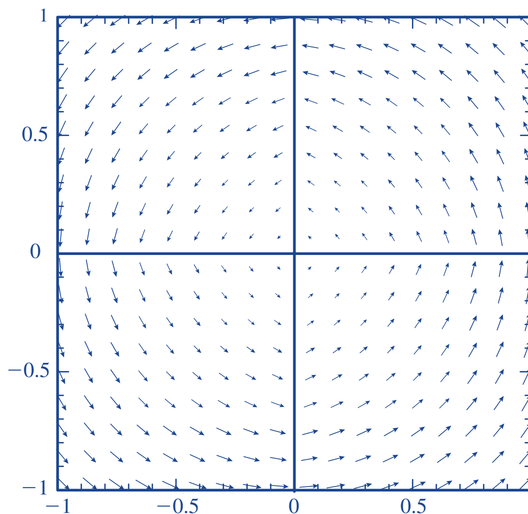


Figura 10.5. El dibujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

Ejemplo 10.5.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = x\cos(z)\,\vec{i} + y\cos(z)\,\vec{j} + z\vec{k}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. La figura 10.6 muestra este campo en muchos puntos del espacio.

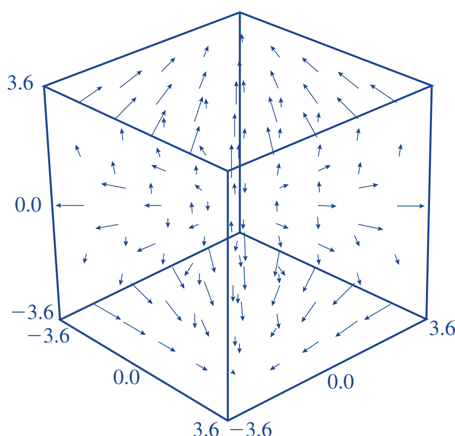


Figura 10.6. El dibujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\cos(z)\,\vec{i} + y\cos(z)\,\vec{j} + z\vec{k}$

Ejemplo 10.6

(Ejercicio resuelto) [gradiente]. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una región abierta y $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces el campo vectorial

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}) &= \nabla f(x_1, \ldots, x_n)\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right) \qquad (10.2)\end{aligned}$$

se llama *campo vectorial gradiente*. Los vectores del campo gradiente son ortogonales a las superficies de nivel de la función f, fig. 10.7.

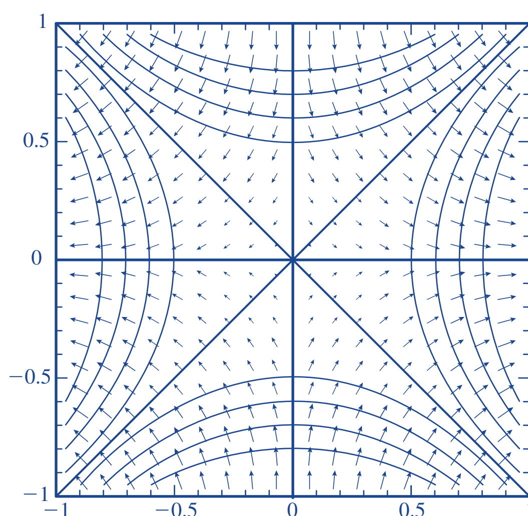


Figura 10.7. El campo vectorial gradiente de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$

10.1.2 Líneas de campo

En muchos casos para entender un campo vectorial necesitamos dibujarlo, y esto puede resultar una tarea no muy corta. Podemos usar ciertas líneas llamadas líneas de campo, un concepto muy importante.

Definición 10.2. Una *línea de campo* de un campo vectorial $\vec{F}(\vec{x})$ es una curva $\vec{r}(t)$, tal que $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$.

Geométricamente significa que el campo vectorial $\vec{F}$ es tangente a sus líneas de campo en cada punto (v. figura 10.8).

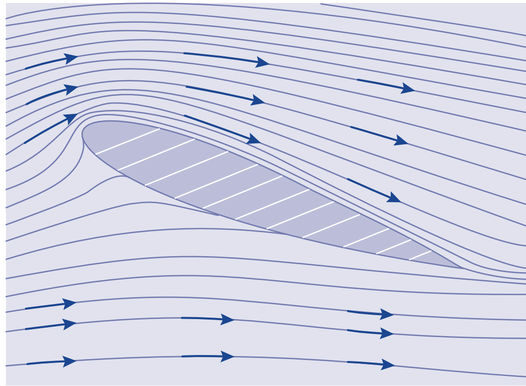


Figura 10.8. Perfil del ala de un avión

Analíticamente, las líneas de campo de un campo vectorial $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \qquad \cdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{10.3}$$

Ejemplo 10.7. Sea $\vec{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. Para hallar las líneas de campo resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (10.3),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -y(t), \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t), \end{cases} \tag{10.4}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, y $y(0) = y_0$. Derivando la primera ecuación y reemplazando en la segunda ecuación obtenemos,

$$\frac{dx}{dt}(t) = -y(t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\frac{dy}{dt}(t) = -x(t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0. \quad (10.5)$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden lineal con coeficientes constantes es:

$$x(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t, \ (a, b \text{ son constantes}). \quad (10.6)$$

Entonces, derivando esta solución y reemplazándola en la primera ecuación de (10.4) tenemos,

$$y(t) = a \operatorname{sen} t - b \cos t \quad (10.7)$$

Reemplazando las condiciones iniciales tenemos que $a = x_0$ y $b = -y_0$.

Entonces, la ecuación de una línea de campo del campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$ que pasa por un punto (x_0, y_0) es

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t, \quad y(t) = x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t. \quad (10.8)$$

Las líneas de campo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ son en general circunferencias. La ecuación de la línea de campo de $\vec{F} = (-y, x)$ que pasa por (x_0, y_0) es: $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ (v. figura 10.9).

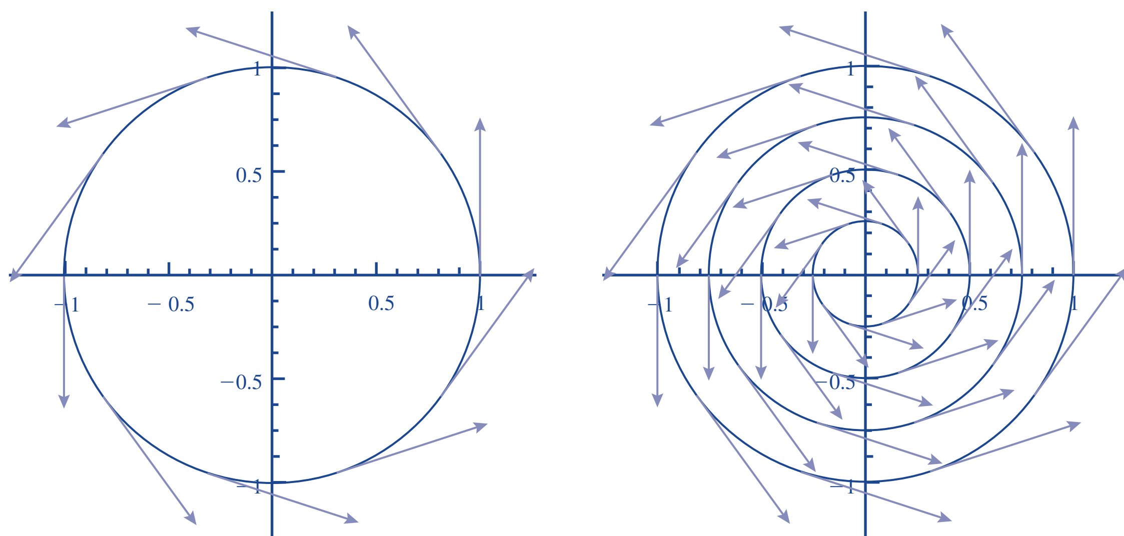


Figura 10.9. La línea de campo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ que pasa por el punto (1, 0) es la circunferencia $\vec{r}(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t))$. En general, las líneas de campo de este campo vectorial son circunferencias con centro en el origen

Ejemplo 10.8. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ un campo vectorial en el espacio $\mathbb{R}^3$ (v. figura 10.10). Para hallar las líneas de campo resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (10.3):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -y(t), \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t), \\ \dfrac{dz}{dt}(t) = z(t) \end{cases} \tag{10.9}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

Dado que las dos primeras ecuaciones del sistema no incluyen z, entonces la solución del sistema compuesto por las dos primeras ecuaciones está dado por

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t, \quad y(t) = x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t. \tag{10.10}$$

La tercera ecuación tiene solución

$$z(t) = z_0\, e^t. \tag{10.11}$$

La solución del sistema es,

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \operatorname{sen} t, \quad y(t) = -x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t, \quad z(t) = z_0\, e^{t} \tag{10.12}$$

La gráfica de una línea de campo que pasa por (x_0, y_0, z_0) es una espiral generalizada sobre el cilindro $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ (v. figura 10.10).

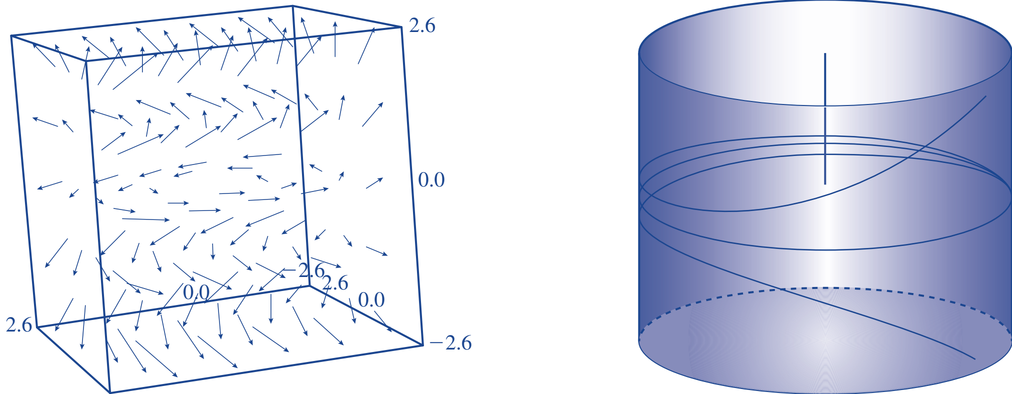


Figura 10.10. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ y algunas líneas de campo. El rayo vertical es la línea del campo que pasa por el punto (0, 0, 1)



10.2 Integral de línea

10.2.1 Integral de línea de un campo escalar a lo largo de una curva

Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es una región abierta. Sea γ una curva suave en $D \subset \mathbb{R}^n$ con una ecuación dada por una función vectorial $\vec{r}: [a, b] \longrightarrow D$, $\vec{r} = \vec{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco y $b - a$ es la longitud de la curva γ. Entonces $f(\vec{r}(s))$ es una función real continua sobre el dominio $[a, b]$.

Definición 10.3. La *integral de línea* de la función f a lo largo de la curva γ, donde γ está parametrizada en términos del parámetro natural s (longitud de arco), $s \in [a, b]$, es

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\vec{r}(s)) ds. \qquad (10.13)$$

Si tenemos una ecuación $\vec{r} = \vec{\rho}(t)$, $t \in [c, d]$, de la curva dada γ, respecto a un parámetro arbitrario t, podemos cambiar el parámetro t al parámetro natural s usando la fórmula

$$s = \int_c^t \|\rho'(t)\| dt \Rightarrow ds = \|\vec{\rho}'(t)\| dt, \qquad (10.14)$$

entonces la integral de línea a lo largo de γ, en cualquier parametrización $\vec{\rho}(t)$ de γ, es

$$\int_\gamma f ds = \int_c^d f(\vec{\rho}(t)) \|\vec{\rho}'(t)\| dt. \qquad (10.15)$$

Ejemplo 10.9. Si $n = 2$, la fórmula para calcular la integral de línea de una función $f(x, y)$ sobre una curva γ dada por las ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$, es

$$\int_\gamma f ds = \int_c^d f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \qquad (10.16)$$



Ejemplo 10.10. Si $n = 3$, la fórmula para calcular la integral de línea de una función $f(x, y, z)$ sobre una curva γ dada por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ es,

$$\int_\gamma f ds = \int_c^d f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \qquad (10.17)$$



Ejemplo 10.11. Sean $f(x, y) = xy$, y $\vec{\rho}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, la ecuación de una circunferencia γ. El valor de la integral de línea de f a lo largo de γ es,

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 8\cos t \operatorname{sen} t\, dt = 0\,. \tag{10.18}$$



Ejemplo 10.12. Sean $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\vec{\rho}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, la ecuación de una hélice γ. El valor de la integral de línea de f a lo largo de γ es

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t + \cos t + \operatorname{sen} t)\sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi^2.\end{aligned} \tag{10.19}$$



10.2.2 Integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva

Sea $\vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es una región abierta. Sea γ una curva suave en $D \subset \mathbb{R}^n$ con una ecuación dada por una función vectorial $\vec{r}$: $[a, b] \longrightarrow D$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Entonces $\vec{F}(\vec{r}(t))$ es una función vectorial continua sobre el dominio $[a, b]$.

Definición 10.4. La integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de la curva γ es

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt. \tag{10.20}$$

Nota 10.1. Observe que si cambiamos la orientación de la curva γ, es decir si cambiamos t por $-t$ en la ecuación paramétrica de γ, el valor de la integral de línea del campo vectorial $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ cambia de signo. La integral de línea a lo largo de una curva γ de una función escalar $\int_\gamma f ds$ no cambia de signo si cambiamos la orientación de la curva.

Ejemplo 10.13. Sean $\vec{F}(x, y) = (x + y, y)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ la ecuación de una circunferencia γ. Observe que la orientación, dada por la parametrización, es positiva (contraria a las manecillas de reloj). Entonces, $\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, y obtenemos

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t\, dt = -\pi. \tag{10.21}$$



Ejemplo 10.14. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (-x, y, 2z)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (1+t, 1-t, 2t)$, $t \in [-1, 2]$ la ecuación de un segmento γ. Entonces, $\vec{r}\,'(t) = (1, -1, 2)$, y obtenemos

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{2} (-(1+t), 1-t, 4t)\cdot(1, -1, 2)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{2} (-(1+t) - (1-t) + 8t)\, dt = \int_{-1}^{2} (8t-2)\, dt = 6. \tag{10.22}$$



La *notación*

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{10.23}$$

donde C es una curva en el plano, representa la integral de línea sobre C del campo vectorial en el plano

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \tag{10.24}$$

Igualmente la notación

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \tag{10.25}$$

donde C es una curva en el espacio, representa la integral de línea sobre C del campo vectorial en el espacio

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)). \tag{10.26}$$

Ejemplo 10.15 (**Ejercicio resuelto**). La integral de línea

$$\int_C -ydx + xdy \tag{10.27}$$

donde C es la curva en el plano $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, representa la integral de línea sobre C del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (-y, x) \tag{10.28}$$

Para calcular esta integral podemos usar la definición (10.20) o simplemente reemplazar $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, y $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ en (10.27) y obtenemos,

$$\int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)dt + (\cos t)(\cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \tag{10.29}$$



10.2.3 Algunas aplicaciones de la integral de línea

La masa de un cable

Sea γ un cable que tiene la forma del arco de una curva dada por la ecuación: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Si la densidad en cada punto $\vec{r}(t)$ del cable está determinada por la función $f(\vec{r}(t))$, entonces la masa de γ es,

$$m = \int_\gamma f ds = \int_b^a f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt \tag{10.30}$$

Ejemplo 10.16. Sean γ la cuerda de un reloj que tiene la forma de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, y $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ su función de densidad. Hallaremos la masa de la cuerda γ. En primer lugar escribimos una ecuación paramétrica de la cuerda. Por ejemplo, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$. Luego,

$$\begin{aligned} m = \int_\gamma \delta\, ds &= \int_0^\pi \delta(\cos t, \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^\pi k(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = k\pi. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Observe que el valor de la masa no depende de la parametrización usada.



El trabajo de un campo de fuerzas

El trabajo realizado por un campo de fuerzas $\vec{F}$ para desplazar una partícula entre dos puntos a lo largo de una curva γ dada por una ecuación $\vec{r} = \vec{r}(t)$ es,

$$\tau = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{10.32}$$

Ejemplo 10.17. El campo de fuerzas, considerado en el plano, inducido por una carga eléctrica puntual ubicada en el origen $(0, 0)$ es

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\|\vec{r}\|^3}\,\vec{r}, \quad \vec{F}(x, y) = \left(\frac{Kx}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}}, \frac{Ky}{\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}}\right). \tag{10.33}$$

donde K es una constante. Hallemos el trabajo realizado por $\vec{F}$ para mover una partícula entre dos puntos $A(1, 2)$ y $B(2, 4)$ a lo largo del segmento AB. Una ecuación paramétrica de AB es $x = t$, $y = 2t$, $1 \leq t \leq 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tau = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_1^2 \frac{Kt}{\sqrt{t^2 + 4t^2}^{\,3}} + 4\frac{Kt}{\sqrt{t^2 + 4t^2}^{\,3}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{3K}{\sqrt{5}t^2}dt = \frac{3K}{2\sqrt{5}}. \int_1^2 \frac{5Kt}{\sqrt{5t^2}^{\,3}}\,dt = \frac{\sqrt{5}K}{10}. \end{aligned} \tag{10.34}$$

En la parametrización escogida $\vec{r}(t) = (t, 2t)$, tenemos $\vec{r}(1) = A$, $\vec{r}(2) = B$, es decir el trabajo que realiza $\vec{F}$ para mover una partícula desde A hasta B es igual a $\frac{\sqrt{5}K}{10}$, mientras que el trabajo que realiza el mismo campo de fuerzas $\vec{F}$ para mover la misma partícula pero desde el punto B hasta el punto A es igual a $-\frac{\sqrt{5}K}{10}$.

10.3 Ejercicios del capítulo 10

Ejercicios recomendados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21.

Ejercicio 10.1. ¿Cuál es el campo vectorial correspondiente? (fig. 10.11)

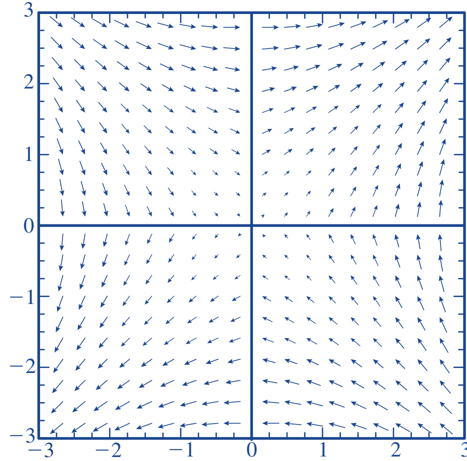


Figura 10.11. Ejercicio 10.1

A. $\vec{F}(x, y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y)$

B. $\vec{F}(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$

C. $\vec{F}(x, y) = (y, x)$

D. $\vec{F}(x, y) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x)$.

Ejercicio 10.2. ¿Cuál es el campo vectorial correspondiente? (fig. 10.12)

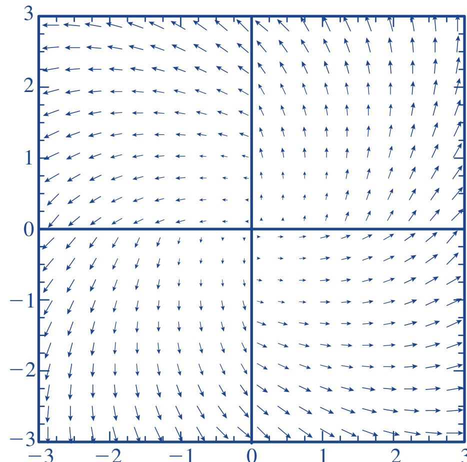


Figura 10.12. Ejercicio 10.2

A. $\vec{F}(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$
B. $\vec{F}(x, y) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x)$
C. $\vec{F}(x, y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y)$
D. $\vec{F}(x, y) = (y, x)$.

Ejercicio 10.3. ¿Cuál es el campo vectorial correspondiente? (fig. 10.13)

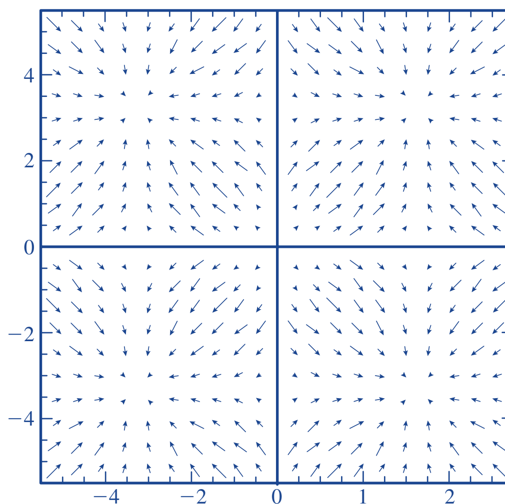


Figura 10.13. Ejercicio 10.3

A. $\vec{F}(x, y) = (y, x)$
B. $\vec{F}(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$
C. $\vec{F}(x, y) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x)$
D. $\vec{F}(x, y) = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y)$

Ejercicio 10.4. ¿Cuál es el campo vectorial correspondiente? (fig. 10.14)

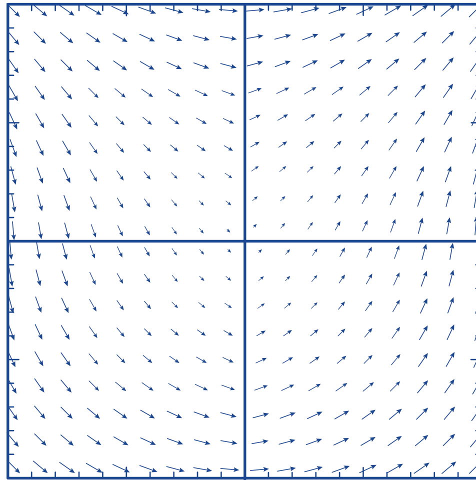


Figura 10.14. Ejercicio 10.4

A. $\vec{F}(x, y) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x)$;

B. $\vec{F}(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$;

C. $\vec{F}(x, y) = (y, x)$;

D. $\vec{F}(x, y) = (\text{sen } x, \text{sen } y)$

Ejercicio 10.5. ¿Cuál es el campo vectorial correspondiente a $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, donde $f(x, y) = x^2 + y^2$? (fig. 10.15)

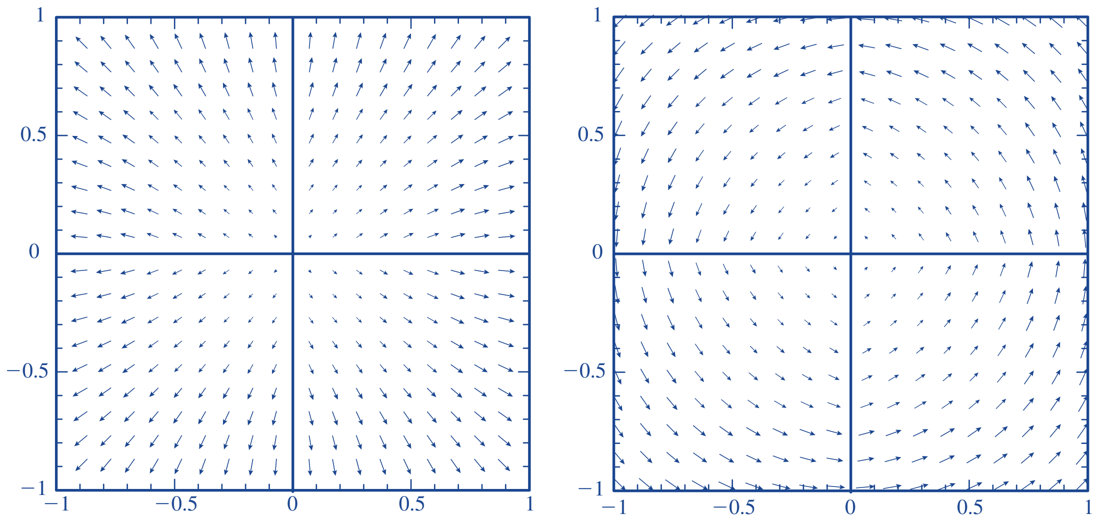


Figura 10.15. Ejercicio 10.5

A. Gráfica de la izquierda;

B. Gráfica de la derecha.

Ejercicio 10.6. Hallar el conjunto de puntos (x, y) tales que $\vec{F}(x,y) = \vec{0}$, donde

1) $\vec{F}(x,y) = (y^2 - 6xy)\vec{i} + (9xy - 54x^2)\vec{j}$;

2) $\vec{F}(x,y) = (r-9)\vec{p}$, donde $\vec{p} = (x,y)$ y $r = \|\vec{p}\|$.

Ejercicio 10.7. Hallar el campo vectorial gradiente asociado al campo escalar.

1) $f(x, y) = \ln(x + 6y)$;

2) $f(x, y) = x^3 e^{-9y}$;

3) $f(x, y) = \sqrt{x^{11} + y^7 + z^{11}}$.

Ejercicio 10.8. Hallar la familia de líneas de flujo del campo vectorial.

1) $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{i} - 4y\vec{j}$.

2) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} - y\vec{j}$.

Ejercicio 10.9. Encontrar la ecuación de la línea de flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} - y\vec{j}$, que pasa por el punto $(4, 3)$.

Ejercicio 10.10. Una partícula en el punto $(8, 3)$ se mueve de acuerdo con el campo de velocidades $\vec{F}(x,y) = \vec{i} + x\vec{j}$. Hallar la trayectoria de la partícula.

Ejercicio 10.11. Hallar el valor de la integral $\int_C f\,ds$, donde

1) $f = xy + \ln(x)$ y C es la parte de recta que va desde $(1, 1)$ hasta $(2, 4)$;

2) $f = xy^3$ y C dada por las ecuaciones $x = 5 \operatorname{sen} t$, $y = 5\cos t$, $z = 6t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

3) $f = y$ y C dada por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t$, $1 \leq t \leq 8$;

4) $f = xe^{yz}$ y C es el segmento que va desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 9, 8)$;

5) $f = xy^4$ y C es la mitad derecha de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 10.12. Hallar el valor de la integral línea de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ a lo largo del segmento AB, donde $A(1, 4, 3)$, $B(-1, 2, 6)$.

Ejercicio 10.13. Sean γ una cuerda que tiene la forma de semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $x \leq 0$, y $\rho(x, y) = k\|x\|$. Hallar la masa de la cuerda γ.

Ejercicio 10.14. Hallar la masa de un alambre

1) en forma de un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 64$ $(x > 0,\ y > 0)$ y función de densidad $\rho(x, y) = x + y$;

2) en forma de hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y función de densidad $\rho = 5$.

Ejercicio 10.15. Hallar el valor de la integral

$$\int_C xydx + (x + y)dy,$$

donde C consiste en los segmentos que van desde $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y desde $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

Ejercicio 10.16. Hallar el valor de $\int_C yzdx + xzdy + xydz$, donde C consiste en la línea poligonal (segmentos) que va desde $(0, 0, 0)$ a $(2, 0, 0)$, desde $(2, 0, 0)$ a $(1, 3, -1)$ y desde $(1, 3, -1)$ a $(1, 3, 0)$.

Ejercicio 10.17. Hallar el valor de la integral

$$\int_C z^2\, dx - z\, dy + 2y\, dz,$$

donde C consiste en los segmentos: desde $(0, 0, 0)$ a $(0, 3, 3)$, desde $(0, 3, 3)$ a $(1, 4, 5)$ y desde $(1, 4, 5)$ a $(1, 4, 7)$.

Ejercicio 10.18. Calcular la integral

$$\int_C yz\, dy + xy\, dz,$$

donde C está dado por: $x = 10\sqrt{t}$, $y = 2t$, $z = 6t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

Ejercicio 10.19. Hallar el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde

1) $\vec{F}(x, y) = x^2y^3\vec{i} - y\sqrt{x}\vec{j}$ y $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} - t^3\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$;

2) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ la curva C dada por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 0$, (circunferencia en el plano xy orientada positivamente vista desde arriba):

3) $\vec{F} = x^2y^3\,\vec{i} - y\sqrt{x}\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y C: $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + t^4\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$;

4) $\vec{F} = \operatorname{sen} x\,\vec{i} + \cos y\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ y C: $\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, $0 \le t \le 2$;

5) $\vec{F} = (x - y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ y C es el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ recorrido en contra de las manecillas del reloj desde (4, 0) a (0, −4);

6) $\vec{F} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$ y C es la parábola $y = 1 + x^2$ desde (−3, 10) a (0, 1);

7) $\vec{F} = e^{x-1}\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ y C: $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}$, $0 \le t \le 4$.

Ejercicio 10.20. La figura 10.16 es un dibujo de un campo vectorial $\vec{F}$, y dos curvas orientadas γ (en la figura 10.16 la curva orientada de la izquierda) y δ (en la figura 10.16 la curva orientada de la derecha). Hallar el signo de la integral de línea.

1) $\int_\gamma \vec{F}\,dr$;

2) $\int_\delta \vec{F}\,dr$.

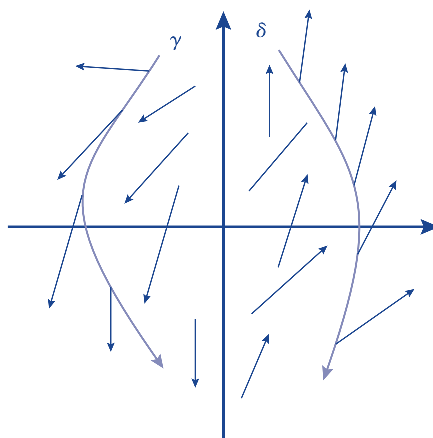


Figura 10.16. Dos curvas orientadas y un campo vectorial

Ejercicio 10.21. Calcule el trabajo total realizado para mover una partícula en un campo de fuerzas dado por:

1) $\vec{F}(x, y, z) = 3xy\,\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\,\vec{k}$ a lo largo de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ desde el punto donde $t = 1$ hasta el punto determinado por $t = 2$,

2) $\vec{F}(x, y) = 7x\,\vec{i} + (7y + 9)\vec{j}$ a lo largo del camino $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\vec{i} + (1 - \cos t)\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$;

3) $\vec{F}(x, y) = x \operatorname{sen} y\, \vec{i} + y\, \vec{j}$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-2, 4)$ a $(-1, 1)$;

4) $\vec{F}(x, y) = xz\, \vec{i} + yx\, \vec{j} + zy\, \vec{k}$ a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = t^2\, \vec{i} - t^3\, \vec{j} + t^4\, \vec{k}$, $-1 \leq t \leq 1$.

Ejercicio 10.22. Calcule el trabajo total realizado para mover una partícula desde $P(0, 0)$ hasta $Q(1, 3)$ en un campo de fuerzas dado por $\vec{F}(x, y) = x^2 y^3 \vec{i} + x^3 y^2 \vec{j}$ a lo largo de la curva,

1) segmento que une P y Q;

2) parábola $y = 3x^2$.

CAPÍTULO 11

Cálculo vectorial

11.1 Teorema fundamental del cálculo

11.1.1 Campo vectorial conservativo

Definición 11.1. Un campo vectorial $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es un *campo vectorial conservativo* (CVC) si existe una función escalar derivable $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que su gradiente sea el campo vectorial dado, es decir,

$$\nabla f = \vec{F} \tag{11.1}$$

A la función f la llamaremos el *potencial escalar*.

Teorema 11.1 (Teorema fundamental para integrales de línea (TFIL)). Sea C una curva suave por partes, definida por $\vec{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$. Si $\vec{r}(t) \in D$ para todo $a \leq t \leq b$ y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función derivable con gradiente continuo sobre C, entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Nota 11.1. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo, entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)),$$

donde f es el potencial escalar de $\vec{F}$.

11.1.2 Independencia de la trayectoria

Definición 11.2. Sea $\vec{F}$ definido en $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y C_1, C_2 dos curvas suaves en D definidas por $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(s)$ respectivamente, las cuales tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final. La integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria si

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2.$$

Teorema 11.2. La integral

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{es independiente de la trayectoria} \qquad (11.2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

para toda curva cerrada C en el dominio D de $\vec{F}$.

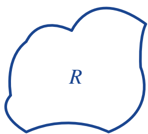
Definición 11.3. Una región R se llama conexa si para cualesquier puntos $A, B \in R$ existe una trayectoria r: $[0, 1] \to R$ tal que $r(0) = A$, $r(1) = B$.

Teorema 11.3. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una región *abierta conexa* D y C cualquier curva sobre D.

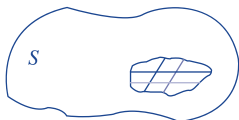
$$\text{Si} \quad \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{es independiente de la trayectoria} \qquad (11.3)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} \quad \text{es campo vectorial conservativo.}$$

Teorema 11.4 (Condición necesaria). Sea $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \in C^1(D)$.



R es simplemente conexa



S no es simplemente conexa

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (11.4)$$

Es decir, si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial conservativo, entonces su matriz derivada $D\vec{F}$,

$$D\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad (11.5)$$

es simétrica.

Teorema 11.5 (Condición suficiente). Sea $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \in C^1(D)$, D, una *región simplemente conexa* (sin huecos)

$$\text{si} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ entonces} \qquad (11.6)$$

$$\vec{F} \text{ es campo vectorial conservativo.}$$

Es decir, si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial que satisface:

1) su dominio D es una región simplemente conexa,

2) su matriz de derivadas (11.5) es simétrica,

entonces $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo.

Nota 11.2 (Justificación del nombre). Queremos justificar por qué se llaman ciertos campos conservativos, ¿qué es lo que ellos conservan? Supongamos que $\vec{F}$ es un campo de fuerzas y que es un campo vectorial conservativo, ¿qué es lo que conserva? La respuesta a esta pregunta es que conserva la *energía*. Veamos.

Consideremos la integral de línea

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

que representa el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}$ para mover una partícula de masa m a lo largo de la curva C desde el punto A hasta el punto B. Sea $\vec{r}\,(t)$ una parametrización de C tal que $\vec{r}\,(a) = A$ y $\vec{r}\,(b) = B$.

Calculemos esta integral de dos maneras diferentes:

1) Usando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{r}\,''(t)$. Tomemos cualquier parametrización $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ de C y denotemos por $v = \|\vec{v}(t)\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|$.

   Usemos la definición de integral de línea,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \vec{r}\,'(t)dt\\ &= m\int_a^b \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}dt\\ &= m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})dt\\ &= \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}(\vec{v}^{\,2})dt\\ &= \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}(b) - \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}(a)\\ &= K\,(b) - K\,(a),\end{aligned} \tag{11.7}$$

   donde $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$ es la energía cinética. Es decir, obtenemos una diferencia de energías cinéticas entre los puntos inicial y final.

2) Usando el hecho de que $\vec{F} = -\nabla P$, donde P es el *potencial de energía* (P está definido por $P = -f$, donde f es el *potencial escalar* de $\vec{F}$, es decir $\vec{F} = \nabla f$),

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{r}\\ &= f\,(\vec{r}(b)) - f\,(\vec{r}(a))\\ &= P\,(\vec{r}(a)) - P\,(\vec{r}(b)), \quad \text{porque} \quad P = -f.\end{aligned} \tag{11.8}$$

Es decir, obtenemos la diferencia de energías potenciales (P) entre los extremos de la trayectoria C.

Como la integral es la misma, igualamos los dos resultados anteriores ((11.7) y (11.8)) y obtenemos

$$\begin{aligned} K(b) - K(a) &= P(\vec{r}(a)) - P(\vec{r}(b)) \\ \Rightarrow K(b) + P(\vec{r}(b)) &= K(a) + P(\vec{r}(a)) \\ \Rightarrow E_T(B) &= E_T(A). \end{aligned} \tag{11.9}$$

Lo cual indica que la energía total E_T es igual en el inicio y en el final (*ley de conservación de energía*). Ésta es la razón de llamar a F *conservativo*.

11.2 Teorema de Green

Teorema 11.6 (Teorema de Green). Sea C^+ una curva cerrada simple, orientada positivamente, suave por partes y D una región del plano xy acotada por C. Sea $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial derivable en Ω, donde Ω es una región del plano que contiene a D y su frontera C, es decir con primeras derivadas de P y Q continuas, definido en una región abierta que contiene a D, entonces:

$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Nota 11.3 (Parametrización de un segmento orientado). En muchos casos la curva C^+ orientada positivamente está compuesta por segmentos. Existe una parametrización de un segmento orientado que va desde el punto $A(x_0, y_0)$ hasta el punto $B(x_1, y_1)$ la cual usaremos y es:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{11.10}$$

Ejemplo 11.1

(Ejercicio resuelto). Comprobemos el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2 y^3)$ y la curva C, que es frontera del triángulo D con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2) orientada positivamente, fig. 11.1. Es decir, verificaremos que

$$\oint_C xy\,dx + x^2 y^3\,dy = \iint_D (2xy^3 - x)\,dA.$$

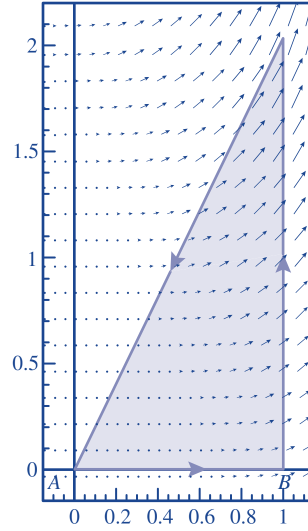


Figura 11.1. Ejemplo 11.1

Integral de línea. Resolveremos tres integrales de línea, una por cada lado del triángulo. Primero parametrizaremos y luego usaremos la definición.

1) Curva C_1: Segmento dirigido desde $A(0, 0)$ hasta $B(1, 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt, \\ dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = xy, \\ P(x(t), y(t)) = (t)(0) = 0, \\ Q(x, y) = x^2 y^3, \\ Q(x(t), y(t)) = (t^3)(0) = 0. \end{cases} \tag{11.11}$$

$$\therefore \int_{C_1} P dx + Q dy = 0.$$

2) Curva C_2: Segmento dirigido desde $B(1, 0)$ hasta $C(1, 2)$.

$$\begin{cases} x(t) = 1, \\ y(t) = 2t, \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dy = 2dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = xy, \\ P(x(t), y(t)) = (1)(2t) = 2t, \\ Q(x, y) = x^2 y^3, \\ Q(x(t), y(t)) = (1)(8t^3). \end{cases} \tag{11.12}$$

$$\therefore \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_0^1 16t^3 dt = 4.$$

3) Curva C_3: Segmento dirigido desde $C(1, 2)$ hasta $A(0, 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t, \\ y(t) = 2 - 2t, \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt, \\ dy = -2dt, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x, y) = xy, \\ P(x(t), y(t)) = (1 - t)(2 - 2t) = 2(1 - t)^2, \\ Q(x, y) = x^2y^3, \\ Q(x(t), y(t)) = (1 - t)^2(2 - 2t)^3 = 8(1 - t)^5. \end{cases} \tag{11.13}$$

$$\therefore \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_0^1 [2(1 - t)^2](-dt) + [8(1 - t)^5](-2dt)$$

$$= -\frac{10}{3}.$$

Por lo tanto, la integral de línea

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \int_{C_1} \cdots + \int_{C_2} \cdots + \int_{C_3} \cdots = 0 + 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}. \tag{11.14}$$

Integral doble. Resolvamos la integral doble. Tomaremos la región acotada por el triángulo D como una región de tipo I.

$$\begin{cases} P = xy, \\ Q = x^2y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^3, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = x, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy^3 - x; \end{cases} \tag{11.15}$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x)\, dydx = \frac{2}{3}.$$

11.3 Rotacional de un campo vectorial

Definición 11.4 (Rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$). Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$, tal que todas las derivadas parciales de P, Q y R existen. Entonces el *rotacional* de $\vec{F}$, que se denota por $\texttt{rot}\ \vec{F}$ o $\nabla \times \vec{F}$, es un *campo vectorial* sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Definición 11.5 (Rotacional de un campo vectorial $\mathbb{R}^2$). Para un campo vectorial $\vec{F}$ definido en el plano xy, o en una región de éste, con componentes $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, el *rotacional* es,

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Teorema 11.7. Sea $f(x, y, z)$ una función escalar derivable en una región abierta Ω, es decir con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\nabla \times [\nabla f(x, y, z)] = \vec{0}. \qquad (11.16)$$

Nota 11.4. Si un campo vectorial $\vec{F}$ en una región D es tal que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ para todo punto en D, decimos que el campo es *irrotacional*. No es cierto que si un campo es irrotacional en una región D, entonces es un campo vectorial conservativo. Para que un campo vectorial sea un campo vectorial conservativo se necesita, además de ser irrotacional, la condición de que D sea una región simplemente conexa. Estudie por ejemplo el campo vectorial definido en todo el plano excepto en el origen $(0, 0)$

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}. \qquad (11.17)$$

El rotacional de este campo es $\vec{0}$, sin embargo no es conservativo pues su dominio no es una región simplemente conexa (v. ejercicios del 11.8 al 11.14 inclusive).

Nota 11.5. La condición de ser un *campo vectorial irrotacional* es equivalente a que su matriz derivada sea simétrica. Si $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$, su matriz derivada es

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (11.18)$$

11.4 Primera forma vectorial del teorema de Green

Teorema 11.8 (Primera forma vectorial del teorema de Green). Sea C^+ una curva cerrada simple, orientada positivamente, suave por partes y D una región del plano xy acotada

por C. Sea $\vec{F}(x, y)$ un campo vectorial derivable en Ω, donde Ω es una región del plano que contiene a D y su frontera C. Si $\vec{F}$ tiene componentes $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, entonces

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k}\, dA.$$

Ejemplo 11.2

(Ejercicio resuelto). 1) Decida si en la región mostrada en la figura 11.2 el campo $\vec{F}$ es rotacional o no. En caso de ser rotacional diga si rota en sentido positivo (antihorario) o negativo (horario).

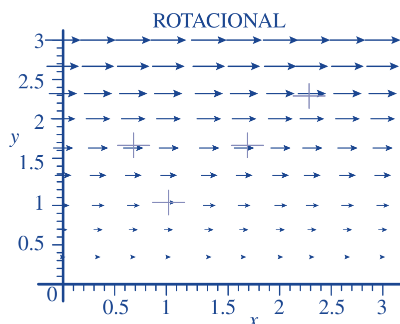


Figura 11.2. Campo vectorial rotacional

2) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (y, 0). \tag{11.19}$$

Halle el valor de la integral de línea

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{11.20}$$

donde C es el cuadrado con vértices en $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$, $D(1, 2)$ orientado positivamente.

Solución:

1) Primero observamos que las líneas de campo del campo mostrado $\vec{F}$ son rectas paralelas al eje x. Imaginemos que el campo vectorial es el campo vectorial de velocidades de un fluido, por ejemplo agua. Tomamos unos cuantos puntos y colocamos *imaginariamente* unas “tapitas” de corcho muy pequeñas con aspas en sus bordes. La figura 11.2 muestra cuatro puntos escogidos arbitrariamente y en ellos cruces que representan tapitas.

Si una tapita rota alrededor de su centro, entonces decimos que el campo es rotacional en ese punto. Si la tapita colocada en cualquier punto rota en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), decimos que el rotacional de $\vec{F}$ es igual a $f(x, y)\vec{k}$ para alguna función $f(x, y) > 0$. Si rota en sentido negativo, decimos que $\nabla \times \vec{F} = -f(x, y)\vec{k}$ con $f(x, y) > 0$. Si la velocidad angular con que rota la tapita es constante, entonces $f(x, y) = c$. En el caso mostrado en la figura 11.2 el campo es rotacional en todo punto de la región mostrada $(x > 0, y > 0)$ y rota en sentido negativo.

2) Podemos aplicar la primera forma vectorial del teorema de Green o hacer la suma de los valores de las cuatro integrales de línea. Escogemos la primera:

$$\vec{F} = (y, 0) \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = -\vec{k}$$
$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} = -\vec{k} \cdot \vec{k} = -1 \tag{11.21}$$
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (-1)dA = -\iint_D dA = -A(D) = -1.$$

En la última integral, D es el cuadrado de área 1.



Nota 11.6. Las siguientes dos expresiones para una integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de una curva suave C son equivalentes:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds, \tag{11.22}$$

donde $\vec{T}$ es el vector tangente unitario a la curva C. (V. figura 11.3.)

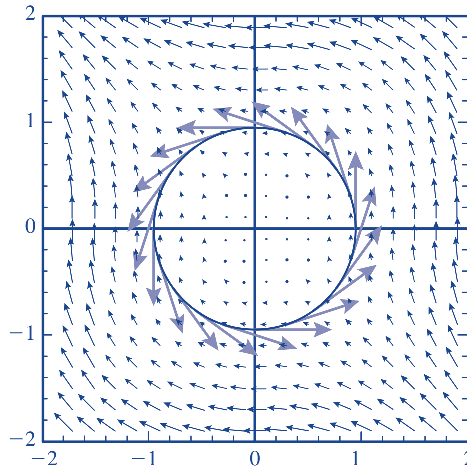


Figura 11.3. Vector tangente unitario $\vec{T}$ a una circunferencia orientada positivamente

11.5 Divergencia de un campo vectorial

Definición 11.6 (Divergencia de un campo vectorial $\mathbb{R}^3$). Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ tal que todas las derivadas parciales de P, Q y R existen. Entonces la *divergencia* de $\vec{F}$, que se denota por `div` $\vec{F}$ o $\nabla \cdot \vec{F}$ es un *campo escalar* sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ejemplo 11.3 **(Ejercicio resuelto).** 1) Decida si en la región mostrada en la figura 11.4 la `divergencia` de $\vec{F}$ es positiva, negativa o cero.

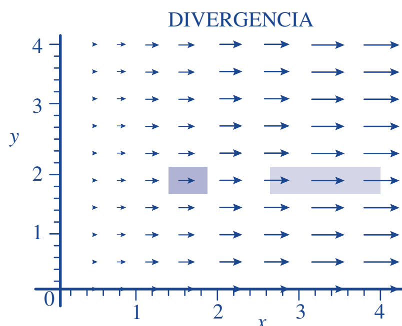


Figura 11.4. Divergencia de un campo vectorial

2) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (x,\ 0). \tag{11.23}$$

Calcule su divergencia en todo punto.

Solución:

1) Podemos pensar que $\vec{F}$ es el campo vectorial de velocidades de un fluido, por ejemplo aire. Observamos que las líneas de campo de $\vec{F}$ son rectas paralelas al eje x y que el campo sobre cada una de las líneas de campo aumenta su magnitud. Es decir, en este ejemplo el fluido se está dilatando. Para "visualizar" este efecto colocamos imaginariamente una superficie plana de control, rectángulo de la izquierda, y pensamos qué le sucedería a esta superficie de control después de cierto tiempo. La superficie de

control no es real, es algo que imaginamos dentro del fluido y ella tiene la propiedad de poderse deformar según las fuerzas que intervienen en sus caras. Sobre las caras de arriba y abajo el campo tiene el mismo efecto, mientras que sobre las caras izquierda y derecha no. Sobre la pared izquierda el campo actúa con menor "fuerza", mientras es más fuerte sobre la cara derecha. Total, la superficie de control se dilata. Decimos entonces que el campo $\vec{F}$ es compresible y que la divergencia es positiva. Si la superficie de control no cambia su área, aunque cambie su forma, decimos que el campo es incompresible y su divergencia igual a cero. Si el área de la superficie de control disminuye, decimos que la divergencia de $\vec{F}$ es negativa en la región donde esto sucede. En este ejemplo, la gráfica 11.4 muestra que el campo tiene divergencia positiva.

2) Calculamos la divergencia,

$$\vec{F} = (x,\, 0) \Rightarrow \nabla \cdot\, \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 1. \tag{11.24}$$



11.6 Segunda forma vectorial del teorema de Green

Teorema 11.9 (Segunda forma vectorial del teorema de Green). Sea C una curva cerrada simple, suave por partes orientada positivamente y D una región del plano xy acotada por C. Sea $\vec{F}\,(x, y)$ un campo vectorial derivable en Ω, donde Ω es una región del plano que contiene a D y su frontera C. Entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \nabla \cdot\, \vec{F}\, dA,$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario de C en la dirección hacia afuera de la región acotada por C.

Nota 11.7. La integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

se llama la *integral del flujo* de $\vec{F}$ a través de C. Si $\vec{F}$ representa el campo vectorial de velocidades de un fluido, el valor de esta integral significa el flujo a través de C, es decir la cantidad de materia por unidad de longitud de C por unidad de tiempo que el fluido atraviesa la curva C (v. figura 11.5).

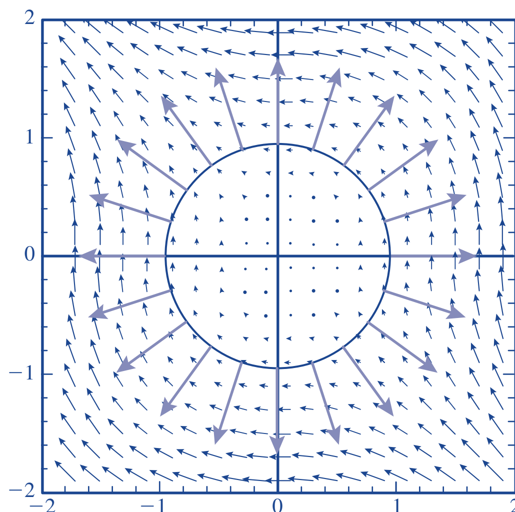


Figura 11.5. Vector normal unitario $\vec{n}$ a una circunferencia C

Ejemplo 11.4

(Ejercicio resuelto). Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ a través de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 11.6).

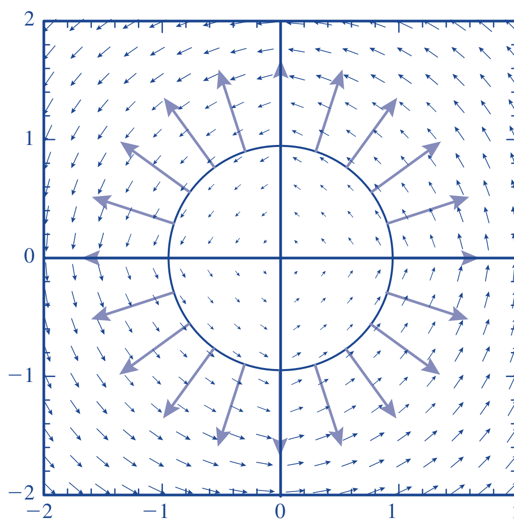


Figura 11.6. Vector normal unitario $\vec{n}$ a una circunferencia C

Como la divergencia de este campo es cero, el flujo a través de cualquier curva cerrada en el plano, en particular la circunferencia unitaria centrada en el

origen, es cero. En el caso especial de la circunferencia unitaria centrada en el origen podemos observar (v. figura 11.6) que el campo no atraviesa la curva C en ningún punto (el campo $\vec{F}$ es siempre tangente a C), por lo tanto el flujo neto es igual a cero.

El hecho de que el flujo sea igual a cero no significa que siempre el campo es tangente a la curva C, como en este ejemplo. El flujo neto igual a cero significa que el flujo por ciertas partes de C está entrando y por otras partes está saliendo. Si el flujo neto es igual a cero significa que el flujo entrante y saliente son iguales. Por ejemplo, para este mismo campo $\vec{F}$ si tomamos como C el cuadrado en el primer cuadrante con dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto vértice en (1, 1), el campo sí atraviesa la curva C, sin embargo el flujo neto es cero.



Teorema 11.10. Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial derivable definido en una región abierta, entonces

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0. \tag{11.25}$$

11.7 Área de una región plana

Usando el teorema de Green podemos encontrar el área de una región en el plano mediante una integral de línea.

Teorema 11.11 (Área de una región plana). El área de una región D en el plano xy acotada por una curva simple C es

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{C^+} xdy - ydx. \tag{11.26}$$

Nota 11.8. La fórmula del teorema (11.11) obviamente no es única, lo que necesitamos realmente es que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sea igual a 1. Por lo tanto, hay infinitas posibilidades de tomar P y Q que satisfagan las condiciones del teorema de Green y que $Q_x - P_y = 1$. La fórmula en este teorema es una de ellas.

Ejemplo 11.5

(Ejercicio resuelto). Usando una integral de línea, comprobar la fórmula para el área de un círculo de radio r.

Tomemos la circunferencia centrada en el origen $x^2 + y^2 = r^2$. Parametrizando, de manera que se recorra en sentido positivo, tenemos $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r \operatorname{sen} t$

con $0 \leq t \leq 2\pi$, lo cual implica que $dx = -r \operatorname{sen} t dt$, $dy = r \cos t dt$. Por lo tanto, aplicando la fórmula del teorema 11.11, tenemos

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(r \cos t)(r \cos t) - (r \operatorname{sen} t)(-r \operatorname{sen} t)] dt \qquad (11.27) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, dt = \pi r^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 11.6

(Ejercicio resuelto). La fórmula (11.26) realmente es muy valiosa al tener que calcular áreas de regiones limitadas por curvas que están dadas en coordenadas polares, por ejemplo calcular el área encerrada por $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de cuatro pétalos).

Para esto tomamos coordenadas polares $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \operatorname{sen} t$ reemplazamos r por $r = r(\theta)$ e igualamos los parámetros $t = \theta$, es decir tenemos $x(t) = \operatorname{sen} 2t \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. En este caso $dx = (2 \cos 2t \cos t - \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t)$, $dy = [\operatorname{sen} 2t \cos t + 2 \cos 2t \operatorname{sen} t] dt$. Por simetría, dado que hay un pétalo en cada cuadrante, tenemos que el área es

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx \\ &= 4 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [(\operatorname{sen} 2t \cos t)(\operatorname{sen} 2t \cos t + 2 \cos 2t \operatorname{sen} t) \qquad (11.28) \\ &\quad - (\operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t + 2 \cos 2t \cos t] dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2t) \, dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

11.8 Ejercicios del capítulo 11

Ejercicios recomendados: 2, 3, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27.

Ejercicio 11.1. La siguiente tabla muestra los valores de f con gradiente continuo.

$y \backslash x$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$, $0 \le t \le 1$. Halle el valor de la integral

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

Ejercicio 11.2. Hallar el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}$ y C la semicircunferencia superior que comienza en $(0, 1)$ y termina en $(2, 1)$ con centro en $(1, 1)$.

Ejercicio 11.3. La figura 11.7 muestra la curva C, parábola $x(t) = t - 1$, $y = (t - 1)^2$ para $0 \le t \le 2$. La curva C va desde $A(-1, 1)$ hasta $B(1, 1)$ por la parábola. Se muestran, además las curvas de nivel de una función f con gradiente continuo. Hallar el valor de $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$.

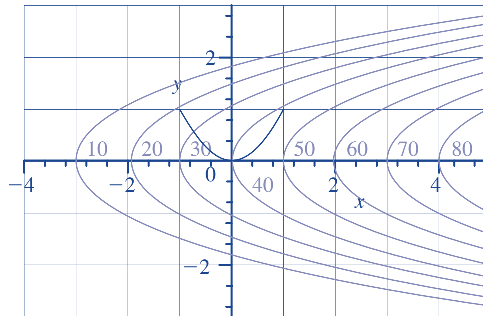


Figura 11.7. Ejercicio 11.3

Ejercicio 11.4. Hallar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y) = x^3y^4\vec{i} + x^4y^3\vec{j}$ y C es la curva $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (1 + t^3)\vec{j}$ $1 \le t \le 2$.

Ejercicio 11.5. Determine cuáles de los siguientes campos $\vec{F}$ son conservativos. En dicho caso, encuentre una función f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

1) $\vec{F}(x, y) = (6x + 5y)\vec{i} + (5x + 4y)\vec{j};$

2) $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\vec{i} + (4xy - y^3)\vec{j};$

3) $\vec{F}(x, y) = (xe^y)\vec{i} + (ye^x)\vec{j};$

4) $\vec{F}(x, y) = (e^y)\vec{i} + (xe^y)\vec{j};$

5) $\vec{F}(x, y) = (2x\cos y - y\cos x)\vec{i} + (-x^2\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)\vec{j};$

6) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}.$

Ejercicio 11.6. En la figura 11.8 se observa una curva C y el campo ∇f.

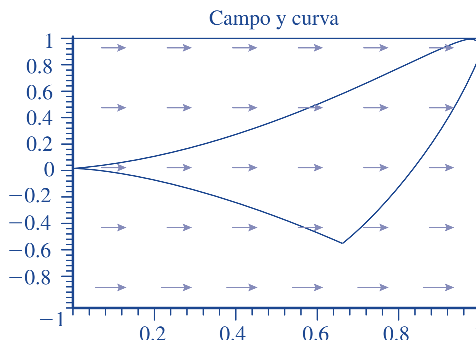


Figura 11.8. Ejercicio 11.6

Hallar:

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

Ejercicio 11.7. Sea $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$. Pruebe que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Ejercicio 11.8. Argumente por qué el dominio de: $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ no es una región simplemente conexa.

Ejercicio 11.9. Halle

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ y C^+ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.

Ejercicio 11.10. Halle

$$\int_C \vec{F} \cdot dr,$$

donde $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ y C^+ es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$ orientada positivamente (v. figura 11.9) (**ayuda**: use la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \quad 0 \leq t \leq \pi$).

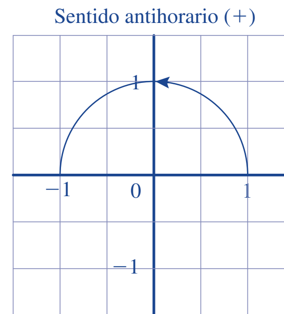


Figura 11.9. Ejercicio 11.10

Ejercicio 11.11. Halle

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ y C^+ es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$ $(y \leq 0)$ orientada negativamente (v. figura 11.10) (**ayuda**: use la parametrización $x = \cos t$, $y = -\operatorname{sen} t; \quad 0 \leq t \leq \pi$).

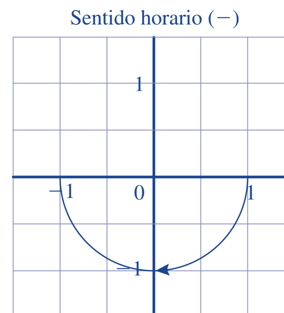


Figura 11.10. Ejercicio 11.11

Ejercicio 11.12. En la figura 11.11 se muestra el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$$

y C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada en sentido antihorario (positivo). Por los ejercicios anteriores este campo no es conservativo, pues a pesar de que $\nabla \times \vec{F} = 0$ en todo su dominio, este dominio $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ no es una región simplemente conexa.

1) Demuestre que

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

2) ¿Existe alguna contradicción con el teorema de Green? Explique.

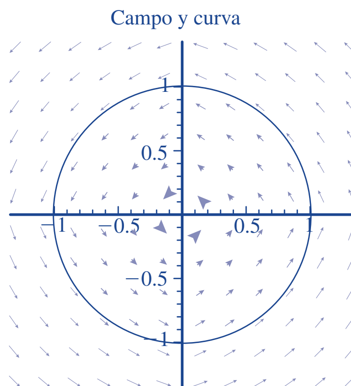


Figura 11.11. Ejercicio 11.12

Ejercicio 11.13. Decida si el campo vectorial

$$F(x, y) = (y, -x)$$

es un campo vectorial conservativo.

Ejercicio 11.14. Sea C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente, fig. 11.12. Use el teorema de Green para calcular

$$\oint_C ydx - xdy$$

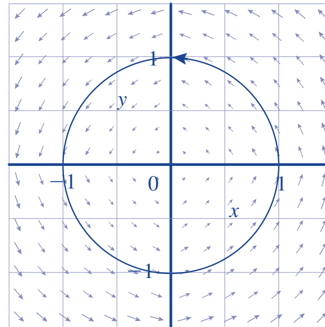


Figura 11.12. Ejercicio 11.14

Ejercicio 11.15. Use el teorema de Green para calcular

$$\oint_C xy^2 dx + x^3 dy\,,$$

donde C es el rectángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3) orientado positivamente.

Ejercicio 11.16. Decida si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

"Si un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ es tal que $P_y = Q_x$ en una región abierta D, entonces $\vec{F}$ es conservativo."

Ejercicio 11.17. Use el teorema de Green para expresar el área encerrada por las curvas:

$$\begin{cases} y = x, \\ x = y^2, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

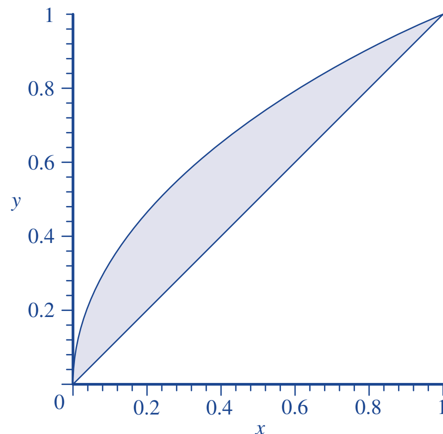


Figura 11.13. Ejercicio 11.17

como una integral de línea. Escribirla (v. figura 11.13).

Ejercicio 11.18. Sea $\vec{F}$ un campo de fuerzas en el plano definido por

$$\vec{F} = e^x \cos x\vec{i} + \frac{1}{1+y^2}\vec{j}.$$

1) Compruebe que $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo.

2) Dibuje la curva C_1 dada por la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

3) Halle

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

4) Sea C_2 la curva parametrizada $x(t) = \cos^4 t e^{\operatorname{sen} t}$, $y(t) = \operatorname{sen}^2 t + 1$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Halle

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ejercicio 11.19. Use el teorema de Green para calcular el valor de la integral de línea

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

donde

1) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = x^3$, C es el rectángulo con vértices (0, 0), (10, 0), (0, 6) y (10, 6).

2) $P(x, y) = e^{4x}$, $Q(x, y) = 18xe^y$, C es el cuadrado con lados $x = 0$, $x = 7$, $y = 0$, $y = 7$.

3) $P(x, y) = 2y + e^{\sqrt{x}}$, $Q(x, y) = 8x + \cos y^4$, C es el borde de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

4) $P(x, y) = \frac{15}{2}y^2 - \tan^{-1} x$, $Q(x, y) = 18x + \operatorname{sen} y$, C es el borde de la región encerrada por la parábola $y = x^2$ y la línea $4 = y$.

5) $P(x, y) = y^3$, $Q(x, y) = -x^3$, C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$.

6) $P(x, y) = 10xy$, $Q(x, y) = 10x^2$, C consiste del segmento que va desde $(-3, 0)$ hasta $(3, 0)$ y la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 11.20. Calcule el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x, y) = x(x+2y)\vec{i} + 4xy^2\vec{j}$ al desplazar una partícula desde el origen a lo largo del eje x hasta (3, 0), luego a lo largo del segmento rectilíneo hasta (0, 3) y luego regresa al origen por el eje y.

Ejercicio 11.21. Una partícula parte del punto $(-3, 0)$, se mueve por el eje x hasta (3, 0) y luego por la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$ hasta el punto de inicio. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza $\vec{F}(x, y) = (24x^3, 24xy^2)$ sobre esta partícula.

Ejercicio 11.22. Halle el área de la región acotada por el hipocicloide con ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = 16\cos^3 t\,\vec{i} + 192\,\mathrm{sen}^3 t\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ejercicio 11.23. Calcule la integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde: $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$, y C consiste en el pedazo de circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde (2, 0) hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y los segmentos desde $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hasta el origen y desde el origen hasta (2, 0).

Ejercicio 11.24. Calcule el rotacional del campo vectorial.

1) $\vec{F}(x, y, z) = 3xy\,\vec{i} + 2yz\,\vec{j} + 7xz\,\vec{k}$.

2) $\vec{F}(x, y, z) = (x - 5z)\vec{i} + (x + y + 9z)\vec{j} + (x - 5y)\vec{k}$.

3) $\vec{F}(x, y, z) = 6e^x\,\mathrm{sen}\,y\,\vec{i} + 2e^x\cos y\,\vec{j} + 9z\,\vec{k}$.

4) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$.

5) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

Ejercicio 11.25. Calcule la divergencia del campo vectorial:

1) $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{2x^2 + 6y^2 + 8z^2}\vec{i} + \dfrac{y}{2x^2 + 6y^2 + 8z^2}\vec{j} + \dfrac{z}{2x^2 + 6y^2 + 8z^2}\vec{k}$.

2) $\vec{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

3) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$

4) $\vec{F}(x, y, z) = (x^3/3 - \cos(yz), \mathrm{sen}(xz^2) - xy^2, y^2z + e^{x+y})$.

5) $\vec{F}(x, y, z) = \left(z\cos(e^{y^2}), x\sqrt{z^2 - 1}, e^{2y-1}\tan(3x^2)\right)$.

Ejercicio 11.26. Determine si $\vec{F}$ es un campo conservativo. En caso de serlo, encuentre una función f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

1) $\vec{F}(x, y, z) = 3zy\vec{i} + 3xz\vec{j} + 3xy\vec{k}$.

2) $\vec{F}(x, y, z) = 10x\vec{i} + 8y\vec{j} + 4z\vec{k}$.

3) $\vec{F}(x, y, z) = 12xy\vec{i} + (6x^2 + 20yz)\vec{j} + 10y^2\vec{k}$.

4) $\vec{F}(x, y, z) = 8e^x\vec{i} + 7e^z\vec{j} + 10e^y\vec{k}$.

5) $\vec{F}(x, y, z) = 12yze^{6xz}\vec{i} + 2e^{6xz}\vec{j} + 12xye^{6xz}\vec{k}$.

Ejercicio 11.27. Si $\vec{G}$, $\vec{F}$ son campos vectoriales, y f, g, campos escalares, demuestre las siguientes fórmulas:

1) $\nabla \times \nabla f(x, y, z) = \vec{0}$ (teorema 11.7).

2) $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = 0$ (teorema 11.10).

3) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\ (\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot \nabla f$.

4) $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$.

5) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

CAPÍTULO 12

Integral de superficie

12.1 Superficies paramétricas

Una *superficie paramétrica* Σ es una superficie que es imagen de una aplicación $\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *regular*, donde D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Es decir, si

$$\vec{r}\,(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (12.1)$$

es necesario que se satisfaga:

1) Si $\vec{r}\,(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2)$, entonces $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.

2) Las derivadas parciales $\vec{r}_u = \partial_u \vec{r} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}$ y $\vec{r}_v = \partial_v \vec{r} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}$ sean linealmente independientes para cada $(u, v) \in D$.

Un punto $A \in \Sigma$ determinado por un vector posición $\vec{r}(u_A, v_A) = (x_A, y_A, z_A)$ tiene *coordenadas interiores* (u_A, v_A) y *coordenadas exteriores* (x_A, y_A, z_A).

El *plano tangente* $T_A\,\Sigma$ a una superficie Σ con la ecuación $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ en un punto $A\,(\vec{r}(u_A, v_A))$ es el plano con *ecuación paramétrica:*

$$\vec{R}\,(s, t) = \vec{r}\,(u_A, v_A) + s\vec{r}_u\,(u_A, v_A) + t\vec{r}_v\,(u_A, v_A). \quad (12.2)$$

o

$$(\vec{R} - \vec{r}\,(u_A, v_A)) \cdot (\vec{r}_u\,(u_A, v_A) \times \vec{r}_v\,(u_A, v_A)) = 0, \quad (12.3)$$

que en coordenadas es la *ecuación lineal*

$$\begin{vmatrix} x - x(u_A, v_A) & y - y(u_A, v_A) & z - z(u_A, v_A) \\ x_u\,(u_A, v_A) & y_u\,(u_A, v_A) & z_u\,(u_A, v_A) \\ x_v\,(u_A, v_A) & y_v\,(u_A, v_A) & z_v\,(u_A, v_A) \end{vmatrix} = 0. \quad (12.4)$$

Para cada punto $A \in \Sigma$ con el vector posición $\vec{r}\,(u_A, v_A)$ existen dos curvas sobre Σ que pasan por A, llamadas *líneas coordenadas* $\vec{r}\,(u) = \vec{r}(u, v_A)$ y $\vec{r}(v) = \vec{r}\,(u_A, v)$ (fig. 12.1)

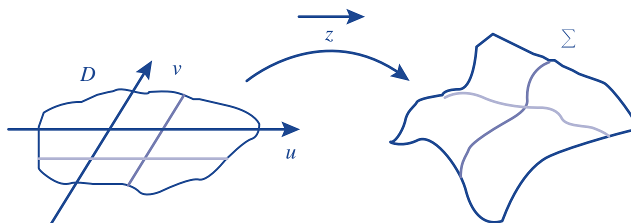


Figura 12.1. Líneas coordenadas de una superficie paramétrica

Las derivadas parciales $\vec{r}_u(u_A, v_A)$ y $\vec{r}_v(u_A, v_A)$ son los vectores tangentes a las líneas coordenadas en el punto A. Entonces el plano tangente $T_A\,\Sigma$ es tangente a las líneas coordenadas.

El vector $\vec{N}(u_A, v_A) = \vec{r}_u(u_A, v_A) \times \vec{r}_v(u_A, v_A)$ es un vector ortogonal al plano $T_A\,\Sigma$. El vector $\vec{N}(u_A, v_A)$ se llama el *vector normal de la superficie* Σ en el punto A. Usaremos también un *vector normal unitario*,

$$\begin{aligned}\vec{n}(u_A, v_A) &= \frac{1}{\|\vec{N}(u_A, v_A)\|}\vec{N}(u_A, v_A)\\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_u(u_A, v_A) \times \vec{r}_v(u_A, v_A)\|}\vec{r}_u(u_A, v_A) \times \vec{r}_v(u_A, v_A).\end{aligned} \tag{12.5}$$

Ejemplo 12.1

(Ejercicio resuelto) (gráfica de $z = f(x, y)$). La gráfica Σ de la función derivable $z = f(x, y)$ es una superficie paramétrica porque podemos considerar

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)). \tag{12.6}$$

La *ecuación del plano tangente* en el punto

$A = (x_A, y_A, f(x_A, y_A)) = \vec{r}(x_A, y_A) \in \Sigma$ es

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - f(x_A, y_A) \\ 1 & 0 & f_x(x_A, y_A) \\ 0 & 1 & f_y(x_A, y_A) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.7}$$

Desarrollando el determinante obtenemos

$$z - f(x_A, y_A) - f_x(x_A, y_A)(x - x_A) - f_y(x_A, y_A)(y - y_A) = 0. \tag{12.8}$$

Por ejemplo, la superficie $z = x^2 + y^2$, paraboloide elíptico, es la superfcie paramétrica $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ (v. figura 12.2). El punto A con vector posición $(1, 1, 2) = \vec{r}(1, 1)$ tiene las coordenadas interiores $(1, 1)$ y las coordenadas exteriores $(1, 1, 2)$. Las líneas coordenadas que pasan por A son las parábolas $\vec{r}(u) = (u, 1, 1 + u^2)$ y $\vec{r}(v) = (1, v, 1 + v^2)$. Por lo tanto, tenemos

que los vectores tangentes a las líneas coordenadas en el punto A son: $\vec{r}_u(1,1) = [1,0,2]$, $\vec{r}_v(1,1) = [0,1,2]$ y el vector normal es

$$\vec{N}(1,1) = [1,0,2]\times[0,1,2] = [-2,-2,1]. \qquad (12.9)$$

La ecuación del plano tangente a Σ en A es

$$z - 2 - 2(x-1) - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 2 = 0. \qquad (12.10)$$

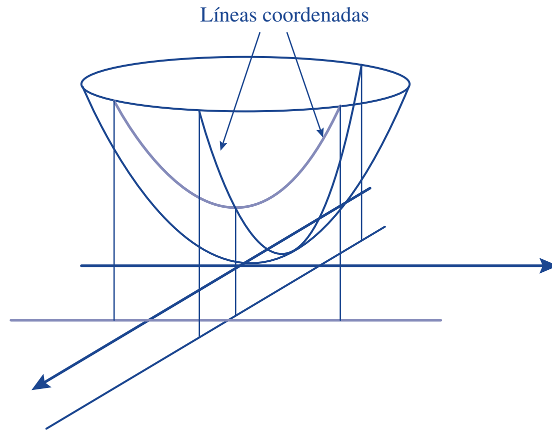


Figura 12.2. Paraboloide elíptico y líneas coordenadas

Ejemplo 12.2

(Ejercicio resuelto) (esfera unitaria). La esfera $\mathbb{S}^2$ con centro en el origen y radio 1 es la superficie paramétrica $\vec{r}(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u)$, donde $(u,v) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$(fig. 12.3). El punto $A = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ pertenece a la esfera y tiene las coordenadas interiores $(\pi/4, \pi/4)$.

Las líneas coordenadas que pasan por el punto A son las circunferencias:

$$\begin{aligned}\vec{r}(u) &= (1/\sqrt{2}\operatorname{sen} u, 1/\sqrt{2}\operatorname{sen} u, \cos u),\\ \vec{r}(v) &= (1/\sqrt{2}\cos v, 1/\sqrt{2}\operatorname{sen} v, 1/\sqrt{2}).\end{aligned} \qquad (12.11)$$

Encontremos la ecuación del plano tangente $T_A\,\mathbb{S}^2$. En primer lugar, calculamos las derivadas $\vec{r}_u(u,v)$ y $\vec{r}_v(u,v)$:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u,v) &= (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u)\\ \vec{r}_v(u,v) &= (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v, 0)\end{aligned} \qquad (12.12)$$

Entonces, los vectores básicos del plano $T_A\,\mathbb{S}^2$ son

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(\pi/4, \pi/4) &= (1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}),\\ \vec{r}_v(\pi/4, \pi/4) &= (-1/2, 1/2, 0),\end{aligned} \qquad (12.13)$$

y la ecuación paramétrica del plano tangente es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.14}$$

Un vector normal es

$$\vec{N}(\pi/4, \pi/4) = (1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}) \times (-1/2, 1/2, 0) = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, 1/2) \tag{12.15}$$

y el vector normal unitario es

$$\vec{n}(\pi/4, \pi/4) = \frac{1}{\|\vec{N}(\pi/4, \pi/4\|} \vec{N}(\pi/4, \pi/4) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}). \tag{12.16}$$

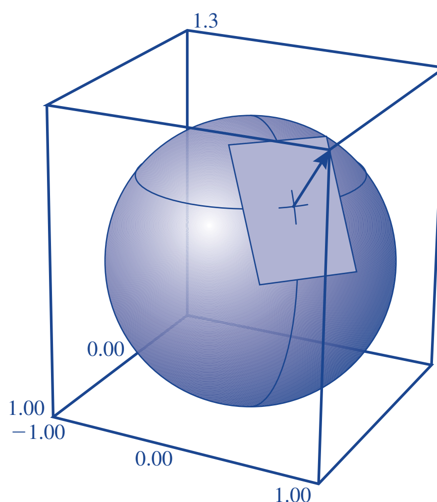


Figura 12.3. Esfera

Por lo tanto la ecuación lineal del plano tangente $T_A\,\mathbb{S}^2$ es:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y - \frac{1}{2} & z - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & 0] \end{vmatrix} = 0 \tag{12.17}$$

$$\Rightarrow \quad x + y + \sqrt{2}z = 2.$$

Ejemplo 12.3

(Ejercicio resuelto) (superficies de revolución). Una s*uperficie de revolución* es aquella que se genera mediante la rotacion de una curva plana, o *generatriz*,

alrededor de una recta *directriz*, llamada *eje de rotación*, la cual se halla en el mismo plano que la curva.

Para los cálculos es conveniente usar las funciones vectoriales,

$$\begin{aligned} \vec{e}(v) &= \cos v\, \vec{i} + \operatorname{sen} v\, \vec{j} = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ 0),\\ \vec{g}(v) &= \vec{e}\,'(v) = -\operatorname{sen} v\, \vec{i} + \cos v\, \vec{j} = (-\operatorname{sen} v,\ \cos v,\ 0). \end{aligned} \tag{12.18}$$

Nota 12.1. Observe que:

1) $\vec{g}\,'(v) = -\vec{e}(v)$.
2) $\{\vec{e}, \vec{g}, \vec{k}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con orientación positiva, es decir: $\vec{e} \times \vec{g} = \vec{k}$, $\vec{g} \times \vec{k} = \vec{e}$, y $\vec{k} \times \vec{e} = \vec{g}$.

Si el eje de rotación es z y la generatriz es una curva $x = f(u)$, $z = g(u)$ ($a \leq u \leq b$) en el plano xy (fig. 12.4), entonces la ecuación de la superficie Σ de revolución es

$$\vec{r}(u, v) = f(u)\vec{e}(v) + h(u)\, \vec{k}. \tag{12.19}$$

Las *ecuaciones paramétricas de una superficie de revolución* con generatriz sobre el plano xy y con directriz el eje z respecto a las coordenadas (x, y, z) son

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v,\\ y = f(u) \operatorname{sen} v,\\ z = h(u), \end{cases} \tag{12.20}$$

$$\vec{r}(u, v) = f(u)\vec{e}(v) + h(u)\, \vec{k}.$$

El parámetro v es el parámetro de rotación $0 \leq v \leq 2\pi$ y el parámetro u es el parámetro de la generatriz $a \leq u \leq b$. Las derivadas de $\vec{r}(u, v)$ son

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \partial_u \vec{r}(u, v) = f'(u)\vec{e}(v) + h'(u)\vec{k},\\ \vec{r}_v &= \partial_v \vec{r}(u, v) = f(u)\vec{g}(v), \end{aligned} \tag{12.21}$$

entonces, el vector normal de Σ en el punto $A\,(\vec{r}(u_A, v_A))$ es

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v\\ \vec{N}(u_A, v_A) &= \Big[(f'(u)\vec{e}(v) + h'(u)\vec{k}) \times f(u)\vec{g}(v) \Big](A)\\ &= \Big[(f'(u)f(u))\, \vec{e}(v) \times \vec{g}(v) + (h'(u)f(u))\, \vec{k} \times \vec{g}(v) \Big](A)\\ &= f(u_A) \Big[f'(u_A)\vec{k} - h'(u_A)\vec{e}(v_A) \Big]\\ &= f(u_A) \Big[-h'(u_A)\vec{e}(v_A) + f'(u_A)\vec{k} \Big]. \end{aligned} \tag{12.22}$$

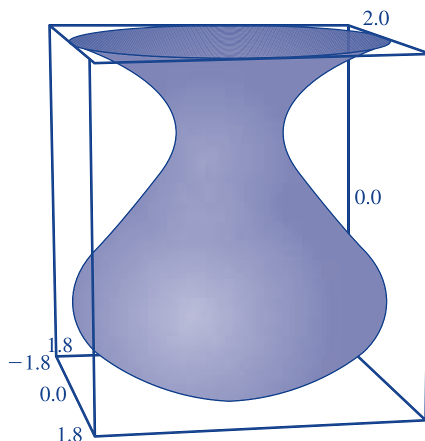


Figura 12.4. Una superficie de revolución. La generatriz es la curva $f(u) = 0.3(u^3 - 3u + 4)$, $h(u) = u$, es decir $x = 0.3(z^3 - 3z + 4)$.

12.2 Área de una superficie paramétrica

Teorema 12.1 (Área de una superficie paramétrica). Sea Σ una superficie paramétrica dada por la ecuación $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces el *área de la superficie* Σ es

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{N}\|\, dA = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, dA. \tag{12.23}$$

Ejemplo 12.4 **(Ejercicio resuelto).** Calculemos el área de la esfera de radio R considerándola como una superficie de revolución . La ecuación paramétrica de la esfera (sin el polo norte y el polo sur) es

$$\vec{r}(u, v) = R(\operatorname{sen} u\, \vec{e}(v) + \cos u\, \vec{k}), \tag{12.24}$$

donde $0 \leq v < 2\pi$, $0 < u < \pi$. Observe que estas ecuaciones pueden obtenerse al considerar las ecuaciones de relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas en las cuales $\rho = R$, $\theta = v$, $\phi = u$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= R(\cos u\, \vec{e}(v) - \operatorname{sen} u\, \vec{k}), \\ \vec{r}_v &= R \operatorname{sen} u\, \vec{g}(v), \end{aligned} \tag{12.25}$$

y, luego,

$$\begin{aligned}\vec{N}(u,v) &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v \\ &= R^2\ (\operatorname{sen} u \cos u \vec{k} + \operatorname{sen}^2 u \vec{e}(v)) \qquad (12.26)\\ &= R^2 \operatorname{sen} u\ (\operatorname{sen} u \vec{e}(v) + \cos v \vec{k}\ ).\end{aligned}$$

Nota 12.2. El vector normal de la fórmula (12.26) corresponde al vector normal exterior. Si multiplicamos por -1 este vector obtenemos el vector normal interior, lo cual es equivalente a intercambiar los parámetros u y v o intercambiar el orden en el producto cruz.

Por lo tanto, el área de la superficie de la esfera de radio R es

$$\begin{aligned}A(\sum) &= \iint_D \|\vec{N}(u,v)\| dA \\ &= R^2 \iint_D |\operatorname{sen} u|\, dA \qquad (12.27)\\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(u)|\, du \right] dv\ = 4\pi R^2,\end{aligned}$$

porque el sen $u > 0$ en su dominio.

Ejemplo 12.5 **(Ejercicio resuelto).** Sea Σ la superficie de revolución obtenida por la rotación de la gráfica de una función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje x. La ecuación paramétrica de Σ es

$$\vec{r}(u,v) = [u, f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v], \quad D = [a,b]\times[0, 2\pi]. \qquad (12.28)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}&\vec{r}_u = [1, f'(u)\cos v, f'(u)\operatorname{sen} v], \quad \vec{r}_v = [0, -f(u)\operatorname{sen} v, f(u)\cos v] \\ &\Rightarrow \vec{n}(u,v) = [f'(u)f(u), -f(u)\cos v, -f(u)\operatorname{sen} v] \\ &\leftarrow \quad \Rightarrow \|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{1+f'(u)^2} f(u).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de Σ es

$$\begin{aligned}A(\sum) &= \iint_D \sqrt{1+f'(u)^2} f(u) dA \\ &= \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{1+f'(u)^2} f(u)\, dv \right] du = 2\pi \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} f(x)\, dx.\end{aligned}$$

Ejemplo 12.6. Consideremos la superficie de revolución obtenida al rotar sobre el eje x la catenaria (fig. 12.5).

$$y = \cosh x - a \leq x \leq a. \tag{12.29}$$

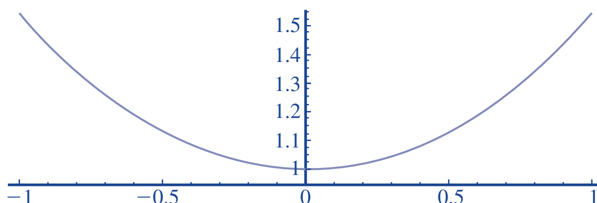


Figura 12.5. Catenaria $y = \cosh x$

Esta superficie obtenida es conocida como *catenoide* (fig. 12.6).

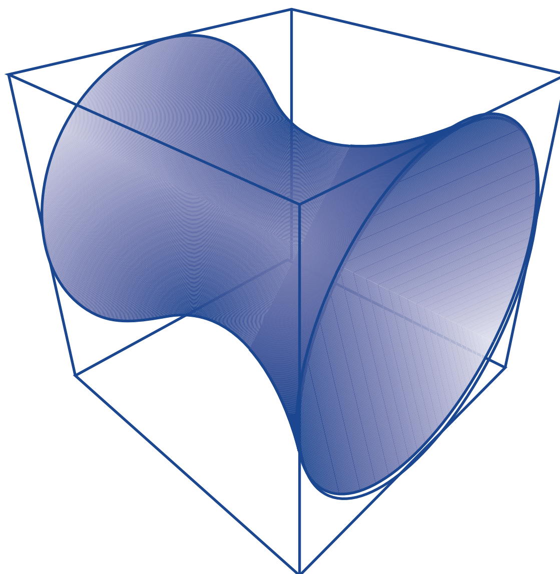


Figura 12.6. Catenoide obtenida al rotar sobre el eje x una catenaria

Las ecuaciones paramétricas de este catenoide son,

$$\begin{cases} x = u \\ y = \cosh u \cos v, \\ z = \cosh u \operatorname{sen} v \end{cases} \qquad 0 \leq v \leq 2\pi, \ -1 \leq u \leq 1 \tag{12.30}$$

El área de la superficie de este catenoide es

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(x)} \cosh x\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh 2x\, dx = 2\pi[1 + \operatorname{senh}(1)\cosh(1)] \tag{12.31}$$

Este catenoide tiene una propiedad particular, es una superficie que tiene en sus bordes dos circunferencias. Cualquier otra superficie suave que una estas circunferencias tiene área mayor.



12.3 Integrales de superficie

12.3.1 Integrales de superficie de una función

Definición 12.1. Sea Σ una superficie paramétrica en $\mathbb{R}^3$ dada por una ecuación $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, $(u, v) \in D$. Sea f una función continua sobre un subconjunto abierto $R \subseteq \mathbb{R}^3$, tal que $\Sigma \subset R$. La *integral de la función f sobre la superficie* Σ es

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_{D} f\,(\vec{r}(u, v))\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv. \tag{12.32}$$

Nota 12.3. Si el dominio D de la función $\vec{r}\,(u, v)$ de una superficie paramétrica Σ es un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, geométricamente la integral de una función f sobre Σ la podemos interpretar como el límite

$$\iint_{\Sigma} f dS = \lim_{\Delta x_i, \Delta y_j \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\,(\vec{r}(u_i^*, v_j^*))A\,(\sigma_{ij}), \tag{12.33}$$

donde $a \leq u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_m = b$, $c \leq v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_n = d$, $(u_i^*, v_j^*) \in \Delta_{ij} = (u_{i-1}, u_i) \times (v_{j-1}, v_j)$, y $\sigma_{ij} = \vec{r}\,(\Delta_{ij})$ (v. figura 12.7).

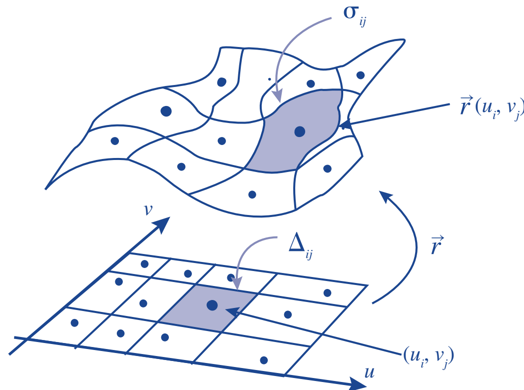


Figura 12.7. Una partición del dominio de Σ y la partición correspondiente de Σ

Ejemplo 12.7.

Sea Σ el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ acotado por los planos horizontales $z = -1$ y $z = 1$, y $f(x, y, z) = x + y + z$. Hallemos la integral $\iint_{\Sigma} f dS$.

Para esto, tomemos la parametrización del cilindro:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, v) &= (\cos v, \operatorname{sen} v, u) \\ &= \vec{e}(v) + u\vec{k}, \quad \text{donde} \quad 0 < v < 2\pi \ \text{ y } \ -1 < u < 1. \end{aligned} \tag{12.34}$$

Entonces

$$\vec{r}_u = \vec{k} \qquad \vec{r}_v = \vec{g}(v), \qquad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \|\vec{k} \times \vec{g}(v)\| = \|-\vec{e}(v)\| = 1 \tag{12.35}$$

y

$$f(\vec{r}(u, v)) = f(\cos v, \operatorname{sen} v, u) = \cos v + \operatorname{sen} v + u. \tag{12.36}$$

Por lo tanto, si $D = (-1, 1) \times (0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f dS &= \iint_D (\cos v + \operatorname{sen} v + u)\, dA \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{2\pi} (\cos v + \operatorname{sen} v + u)\, dv \right] du = 0. \end{aligned} \tag{12.37}$$



Ejemplo 12.8.

Sea Σ la gráfica de una función $z = h(x, y)$ sobre $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Podemos tomar la parametrización de Σ: $\vec{r}(x, y) = (x, y, h(x, y))$. Entonces,

$$\vec{r}_x = (1, 0, h_x), \quad \vec{r}_y = (0, 1, h_y), \quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-h_x, -h_y, 1). \tag{12.38}$$

Por lo tanto, si $f(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \in R \subseteq \mathbb{R}^3$ y $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, es una función continua, y $\Sigma \subset R$, entonces

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\, dxdy. \tag{12.39}$$



Nota 12.4. Si $f = f(x, y, z)$ es una función positiva en D (dominio de Σ), es decir $f(u, v, h(u, v)) > 0$ donde $(u, v) \in D$, entonces $\iint_{\Sigma} f\, dS$ se puede interpretar como la *masa* de una placa con forma Σ y función de distribución de densidad f. Si la función f es constante e igual a uno, entonces $\iint_{\Sigma} f\, dS$ se puede interpretar como el *área* de una placa con forma Σ.

Ejemplo 12.9. Consideremos la superficie Σ del triángulo ABC en $\mathbb{R}^3$, donde $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y la función $f = f(x, y, z) = z$ definida sobre este triángulo.

El triángulo es la gráfica de la función $z = h(x, y) = 6 - 6x - 3y$ sobre el triángulo OAB en el plano xy (v. figura 12.8).

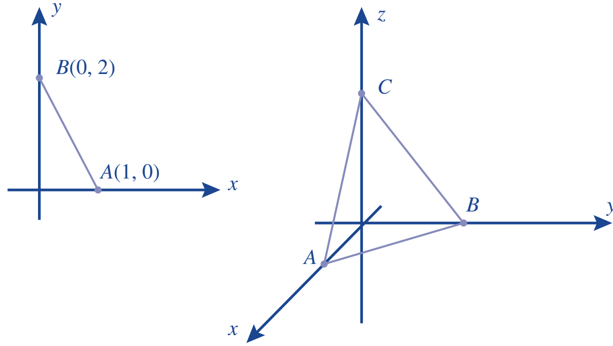


Figura 12.8. Gráfica de la función $z = h(x, y) = 6 - 6x - 3y$ sobre el triángulo OAB

Entonces la integral de la funcion f sobre la supercie Σ es

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f dS &= \iint_{\Delta\, OAB} f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\, dxdy \\ &= \iint_{\Delta\, OAB} (6 - 6x - 3y) \sqrt{1 + 6^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{46} \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (6 - 6x - 3y) dy \right] dx = 2\sqrt{46}.\end{aligned}$$



12.4 Integral de superficie de un campo vectorial

12.4.1 Orientación de una superficie

Una superficie Σ se llama *orientable* si Σ admite un campo vectorial continuo de vectores normales unitarios $\vec{n}$.

Si la superficie Σ es orientable, entonces Σ tiene dos *orientaciones*, una orientación dada por el campo vectorial $\vec{n}$, y la otra dada por el campo vectorial $-\vec{n}$ (v. figura 12.9).

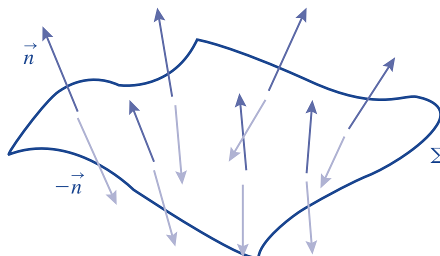


Figura 12.9. Las dos *orientaciones* de una superficie orientable, dadas por $\vec{n}$ y por $-\vec{n}$.

Una superficie *orientada* es una superficie con un campo vectorial normal unitario fijo. Este campo se llama una *orientación* de la superficie.

Hay unas superficies *no orientables*, por ejemplo, la banda de Möbius (v. figura 12.10).

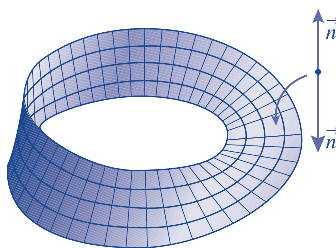


Figura 12.10. La banda de Möbius es una superficie no orientable

12.4.2 Integral de superficie de un campo vectorial

Sea Σ una superficie orientada por un campo normal $\vec{n}$.

Definición 12.2 (Flujo de un campo vectorial). Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial definido en un subconjunto abierto $R \subseteq \mathbb{R}^3$ y Σ una superficie orientable tal que $\Sigma \subset R$. Entonces *la integral superficie del campo vectorial* $\vec{F}$ es

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS. \tag{12.40}$$

La integral (12.40) se llama *el flujo de* $\vec{F}$ *a través de la superficie* Σ.

Sea $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ una parametrización de una superficie Σ y una orientación de Σ determinada por el campo normal unitario $\vec{n}$,

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \vec{r}_u \times \vec{r}_v. \tag{12.41}$$

Entonces, la integral de superficie para un campo vectorial $\vec{F}$ sobre la superficie Σ (*flujo de f a través de* Σ) es

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_\Sigma \left(\vec{F}\cdot\frac{1}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\right)dS$$
$$= \iint_D \left(\vec{F}\cdot\frac{1}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,dA = \iint_D \vec{F}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,dA.$$

Recordemos que el *producto mixto de tres vectores* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ es $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Si $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ y $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$, entonces

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}. \qquad (12.42)$$

Entonces, el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ a través de Σ es

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$
$$= \iint_D \vec{F}(u,v)\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,dA \qquad (12.43)$$
$$= \iint_D (\vec{F},\vec{r}_u,\vec{r}_v)\,dA.$$

Usando la fórmula (12.42) para calcular el producto mixto tenemos que el flujo es igual a

$$\iint_D \det\begin{bmatrix} P(u,v) & Q(u,v) & R(u,v) \\ r_u^1 & r_u^2 & r_u^3 \\ r_v^1 & r_v^2 & r_v^3 \end{bmatrix} dudv \qquad (12.44)$$

donde $\vec{r}_u = (r_u^1, r_u^2, r_u^3)$, y $\vec{r}_v = (r_v^1, r_v^2, r_v^3)$.

Ejemplo 12.10. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ a través de la superficie del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ acotada por los planos $x = 0$ y $x = 4$.

Tomemos la parametrización del cilindro $x = u$, $y = 2\cos v$, $z = 2\,\text{sen}\,v$, donde $0 \le u \le 4$, $0 \le v \le 2\pi$. Entonces, $D = (0, 4)\times(0, 2\pi)$,

$$\vec{r}(u,v) = (u, 2\cos v, 2\,\text{sen} v) \Rightarrow \vec{r}_u = (1, 0, 0), \quad \vec{r}_v = (0, -2\,\text{sen} v, 2\cos v)$$

y

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) = (u,\ 2\cos v,\ 2\operatorname{sen} v). \tag{12.45}$$

El campo vectorial normal $\vec{n}$ es

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1,0,0)\times(0,-2\operatorname{sen} v,\ 2\cos v) = (0,\ -2\cos v,\ -2\operatorname{sen} v) \tag{12.46}$$

Por lo tanto, usando la fórmula (12.43) tenemos que

$$\begin{aligned}\text{flujo} &= \iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{S}\\ &= \iint_{D} \det\begin{bmatrix} u & 2\cos v & 2\operatorname{sen} v\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -2\operatorname{sen} v & 2\cos v\end{bmatrix} dA \qquad (12.47)\\ &= \iint_{D}(-4)\,dA = -4A(D) = -32\pi.\end{aligned}$$

♦

Nota 12.5. Observemos que el campo vectorial $\vec{n}$ está "entrando" a la superficie Σ, mientras que el campo vectorial $\vec{F}$ está atravesando la superficie Σ de adentro hacia afuera. Si tomamos el campo vectorial sobre Σ, que es la proyección de $\vec{F}$ sobre $\vec{n}$, $\vec{G} = \operatorname{pr}_{\vec{n}}(\vec{F})$, los dos campos vectoriales $\vec{G}$ y $\vec{n}$ en todo punto de la superficie Σ tienen sentido contrario. Ésta es la razón por la cual el flujo neto es negativo.

Ejemplo 12.11

(Ejercicio resuelto). Encontraremos el flujo del campo $\vec{F} = (-0)$ a través de la esfera $\mathbb{S}^2$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En todo punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ el vector normal $\vec{n}$ es $\vec{n} = (x, y, z)$ (normal exterior) y el vector del campo es $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Por lo tanto, $\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0. \tag{12.48}$$

Este campo vectorial $\vec{F}$ no atraviesa en ningún momento la superficie de la esfera.

Si tomamos otro campo $\vec{G}(x, y, z) = (x, y, z)$, el cual sí atraviesa la esfera (de adentro hacia afuera), tenemos que $\vec{G}\cdot\vec{n} = 1$, y, luego,

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \vec{G}\cdot d\vec{S} = A(\mathbb{S}^2) = 4\pi. \tag{12.49}$$

El flujo neto es positivo, dado que los campos $\vec{G}$ y $\vec{n}$ sobre todo punto de la esfera tienen el mismo sentido.



Nota 12.6. Cuando el flujo neto de un campo vectorial a través de una superficie es constante, se puede interpretar de la siguiente manera:

1) Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial constante y que atraviesa una superficie Σ que es un pedazo de plano con área en la dirección de $\vec{n}$. En este caso, el flujo numéricamente es igual al volumen de un sólido de base Σ y altura $\|\vec{F}\|$, flujo $= V = A\|\vec{F}\|$.

2) Si el flujo neto es cero, significa una de dos:

   a) el campo no atraviesa la superficie, como es el caso del ejemplo inmediatamente anterior;

   b) el campo atraviesa la superficie en una región en la dirección de $\vec{n}$ y necesariamente debe existir otra(s) región(es) de la superficie donde el campo lo atraviesa en la dirección contraria $-\vec{n}$, y además estos flujos se compensan.

3) Si el flujo es positivo, el flujo neto que atraviesa la superficie es mayor en la dirección del campo dado por la orientación $\vec{n}$ que el flujo en la dirección contraria $-\vec{n}$.

12.5 Ejercicios del capítulo 12

Ejercicios recomendados: 1, 2, 6-10, 14, 15, 17, 18-26.

Ejercicio 12.1. ¿Cuál ecuación paramétrica corresponde a cuál gráfica ($v \in [0, 2\pi]$)? (fig. 12.11)

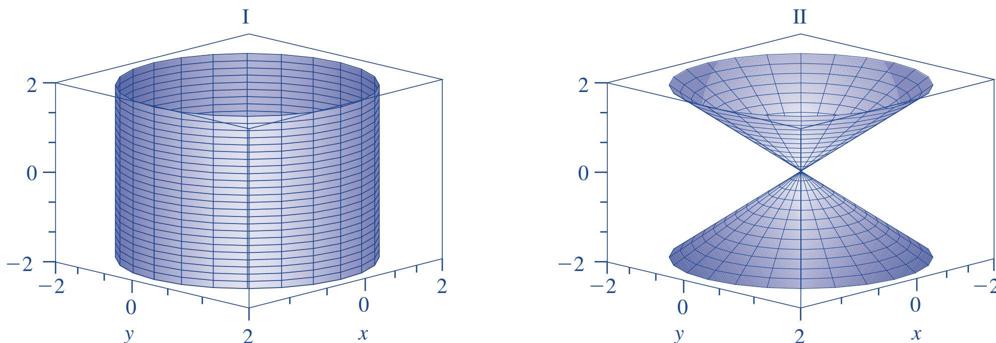


Figura 12.11. Ejercicio 12.1

$$\mathbf{A}\begin{cases} x = \cos v, \\ y = \operatorname{sen} v, \\ z = u, \end{cases} \qquad \mathbf{B}\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\operatorname{sen} v, \\ z = u. \end{cases}$$

a. A = I y B = II.

b. A = II y B = I.

Ejercicio 12.2. ¿Cuál ecuación corresponde a cuál gráfica ($v \in [0, 2\pi]$)? (fig. 12.12).

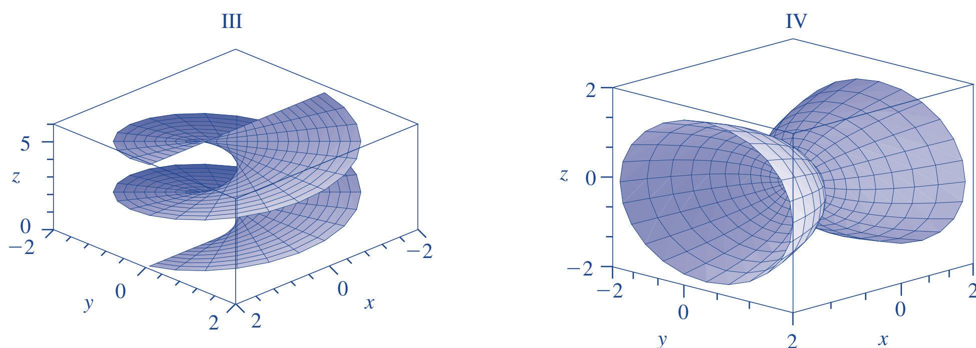


Figura 12.12. Ejercicio 12.2

$$\text{A}\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\operatorname{sen} v \\ z = v \end{cases} \qquad \text{B}\begin{cases} x = u^3 \\ y = u\operatorname{sen} v, \\ z = u\cos v. \end{cases}$$

a. A = III y B = IV,

b. A = IV y B = III.

Ejercicio 12.3. ¿Cuál ecuación corresponde a cuál gráfica ($v \in [0, 2\pi]$)? (fig. 12.13).

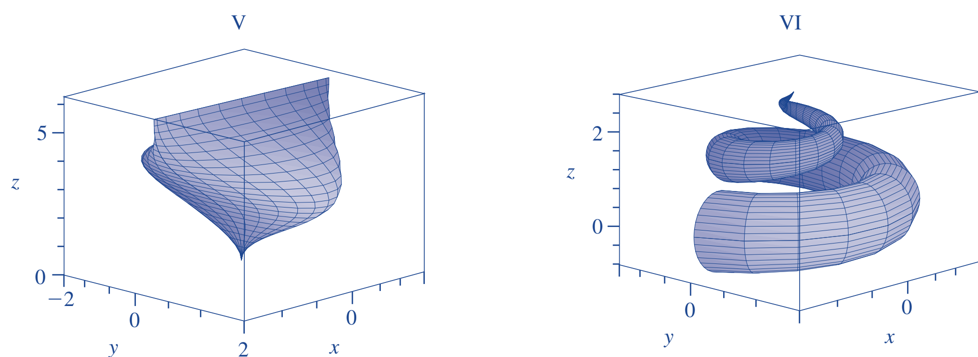


Figura 12.13. Ejercicio 12.3

$$\text{A}\quad \begin{cases} x = (1-u)(3+\cos v)\cos 4\pi u, \\ y = (1-u)(3+\cos v)\operatorname{sen} 4\pi u, \\ z = 3u + (1-u)\operatorname{sen} v, \end{cases} \qquad \text{B}\quad \begin{cases} x = (u - \operatorname{sen} u)\cos v, \\ y = (1-\cos u)\operatorname{sen} v, \\ z = u. \end{cases}$$

a. A = V y B = VI,

b. A = VI y B = V.

Ejercicio 12.4. ¿Cuál ecuación corresponde a cuál gráfica? (fig. 12.14).

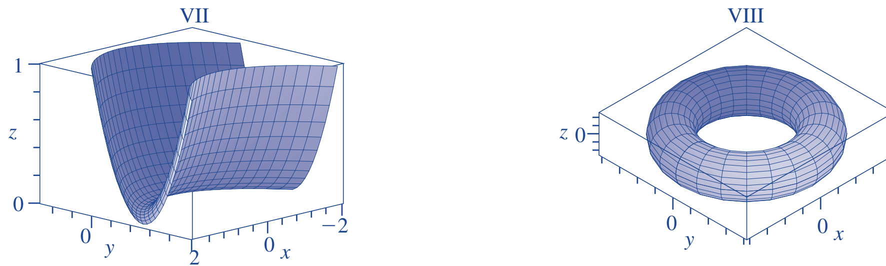


Figura 12.14. Ejercicio 12.4

$$\text{A}\quad \begin{cases} x = (3+\cos v)\cos u, \\ y = (3+\cos v)\operatorname{sen} u, \\ z = \operatorname{sen} v, \end{cases} \qquad \text{B}\quad \begin{cases} x = 2u, \\ y = u^2 + v, \\ z = v^2. \end{cases}$$

a. A = VII y B = VIII,

b. A = VIII y B = VII.

Ejercicio 12.5. ¿Cuál ecuación corresponde a cuál gráfica $(u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi])$? (fig. 12.15).

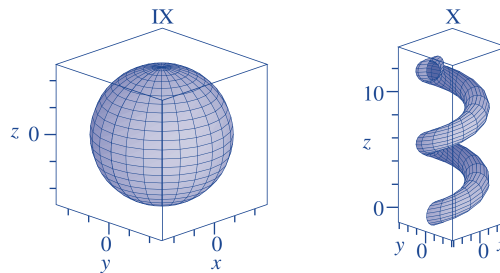


Figura 12.15. Ejercicio 12.5

$$\text{A}\quad \begin{cases} x = \cos u \operatorname{sen} v, \\ y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \\ z = \cos v, \end{cases} \qquad \text{B}\quad \begin{cases} x = (2+\operatorname{sen} v)\cos u, \\ y = (2+\operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u, \\ z = u + \cos v. \end{cases}$$

a. A = IX y B = X,

b. A = X y B = IX.

Ejercicio 12.6. Sea S la parte del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

arriba del plano xy (v. figura 12.16).

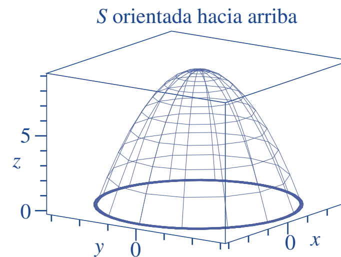


Figura 12.16. El paraboloide

Una parametrización de S es:

A. $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, 9 - u^2)$;

B. $\vec{r}(u, v) = (u, \sqrt{9 - u^2}, 9 - u^2)$.

Ejercicio 12.7. La representación paramétrica del paraboloide elíptico

$$x + y^2 + 10z^2 = 16$$

que está frente del plano $x = 0$ es:

A. $x = 16 - y^2 - 10z^2$, $y = y$, $z = y$, $y^2 + 10z^2 \geq 16$;

B. $x = 16 - y^2 - 10z^2$, $y = y$, $z = z$, $y^2 + 10z^2 \leq 16$;

C. $x = 16 - y^2 - 10z^2$, $y = y$, $z = y$, $0 \geq y^2 + 10z^2 \leq 4$;

D. $x = x$, $y = \sqrt{16 - x + 10z^2}$, $z = z$.

Ejercicio 12.8. La representación paramétrica de la parte de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

que se sitúa arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es:

A. $x = x$, $y = y$, $z = 9 - x^2 - y^2$, $0 < y^2 + x^2 < 9$;

B. $x = x$, $y = y$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $4.5 < y^2 + x^2 < 9$;

C. $x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 3 < y^2 + x^2 < 9;$

D. $x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 < y^2 + x^2 < 4.5.$

Ejercicio 12.9. La representación paramétrica de la parte del cilindro

$$x^2 + z^2 = 9$$

que está entre los planos $y = -3$ y $y = 7$ es:

A. $x = \cos\phi,\ y = y,\ z = \operatorname{sen}\phi,\ 0 < y < 7;$

B. $x = x,\ y = x^2 + z^2,\ z = z,\ 0 < y < 7;$

C. $x = \operatorname{sen}\phi,\ y = y,\ z = \cos\phi,\ -3 < y < 7;$

D. $x = x,\ y = x^2 + z^2,\ z = z,\ -3 < y < 7.$

Ejercicio 12.10. La representación paramétrica de la parte del plano $z = 2$, que se situá en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ es:

A. $x = r\cos\phi,\ y = r\operatorname{sen}\phi,\ z = 2,\ 0 < r < 4,\ 0 < \phi < \pi;$

B. $x = r\cos\phi,\ y = r\operatorname{sen}\phi,\ z = 2,\ 0 < r < 4,\ 0 < \phi < 2\pi;$

C. $x = r\cos\phi,\ y = r\operatorname{sen}\phi,\ z = r,\ 0 < r < 4,\ 0 < \phi < 2\pi;$

D. $x = r\cos\phi,\ y = r\operatorname{sen}\phi\cos\phi,\ z = r\operatorname{sen}\phi,\ 0 < r < 4,$
$0 < \phi < 2\pi.$

Ejercicio 12.11. Las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtiene al hacer girar la curva $y = e^x,\ 0 \leq x \leq 8$, alrededor del eje x son:

A. $x = x,\ y = e^x\operatorname{sen}\phi,\ z = e^x\cos\phi,\ 0 < x < 8,\ 0 < \phi < \pi;$

B. $x = x,\ y = e^x\operatorname{sen}\phi,\ z = z,\ 0 < x < 8,\ 0 < \phi < \pi;$

C. $x = x,\ y = e^x\operatorname{sen}\phi,\ z = z,\ 0 < x < 8,\ 0 < \phi < 2\pi;$

D. $x = x,\ y = e^x\cos\phi,\ z = e^x\operatorname{sen}\phi,\ 0 < x < 8,\ 0 < \phi < 2\pi.$

Ejercicio 12.12. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa un plano?

A. $r(u, v) = u\cos v\,\vec{i} + u\operatorname{sen} v\,\vec{j} + u^2\vec{k};$

B. $(6 + 10u)\vec{i} + (-u + 9v)\vec{j} + (5 + 2u + 10v)\vec{k};$

C. Ninguna.

Ejercicio 12.13. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa un cono?

A. $r(x, \theta) = (x, x\cos 7\theta, x\operatorname{sen}7\theta);$

B. $r(x, \theta) = (x, \cos 10\theta, \operatorname{sen}10\theta);$

C. Ninguna.

Ejercicio 12.14. Hallar el área de

1) la parte del paraboloide $x = y^2 + x^2$ que está dentro del cilindro $z^2 + y^2 = 36$;

2) la superficie $y = 4x + z^2$ que se encuentra entre los planos $x = 0$, $x = 4$, $z = 0$, $y = 5$,

3) la superficie con ecuaciones paramétricas $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - u^2 + v^2 \leq 36$.

Ejercicio 12.15. La integral doble para calcular el área de la superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 2u \cos v$, $y = 5u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq 2\pi$ es:

A. $\int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{100u^2 \cos^2 v + 16u^2 \operatorname{sen}^2 v + 100u^4}\, dv du$;

B. $\int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{20u^4 \cos^2 v + 8u^4 \operatorname{sen}^2 v + 10u^2}\, dv du$;

C. $\int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{100u^4 \cos^2 v + 16u^4 \operatorname{sen}^2 v + 100u^2}\, dv du$;

D. $\int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{20u^4 \cos^4 v + 16u^4 \operatorname{sen}^4 v + 100u^2}\, dv du$;

E. $\int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{20u^4 \cos^4 v + 16u^2 \operatorname{sen}^4 v + 50u^4}\, dv du$.

Ejercicio 12.16. Sea la parte del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

encima del plano xy ($z \geq 0$) (v. figura 12.16). Si tomamos S con orientación hacia arriba, es decir escogemos un vector normal a S apuntando hacia arriba, entonces la curva frontera (borde) de la superficie (circunferencia sobre el plano xy, $x^2 + y^2 = 9$) queda orientada positivamente sobre el plano xy.

A. Falso.

B. Verdadero.

Ejercicio 12.17. Sea S la parte del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

encima del plano xy ($z \geq 0$) (v. figura 12.16). Hallar un vector normal hacia arriba (**ayuda:** *considere la parametrización*):

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, 9 - u^2).$$

Ejercicio 12.18. Hallar la integral de superficie

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS,$$

donde

1) $f(x, y, z) = x^2yz$ y S es la parte del plano $z = 1 + 4x + 3y$ que se encuentra sobre el rectángulo $[0,3] \times [0,2]$;

2) $f(x, y, z) = 48yz$ y S es la parte del plano $x + y + z = 2$ que se encuentra en el primer octante;

3) $f(x, y, z) = 5x$ y S es la superficie $y = x^2 + 10z$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$;

4) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ y donde S es la parte del paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ tal que $x \geq 0$;

5) $f(x, y, z) = 5yz$ y S es la parte del plano $z = y + 2$ que esta dentro del cilindro $8 = x^2 + y^2$;

6) $f(x, y, z) = 8\,(x^2z + z^2\,)$ y es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$;

7) $f(x, y, z) = 5\,(x^2z + z^2)$ y S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre los planos $z = 0$ $y = 5$;

8) $f(x, y, z) = x$ y S es la superficie con ecuaciones paramétricas $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$, tal que $u^2 + v^2 \leq 1$.

Ejercicio 12.19. Sea S la parte del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

encima del plano xy ($z \geq 0$) (v. figura 12.16). Sea $\vec{F}(x, y, z) = (2 - x^2 - y^2)\vec{k}$ el campo vectorial mostrado en la figura 12.17. Hallar el flujo de F a través de S.

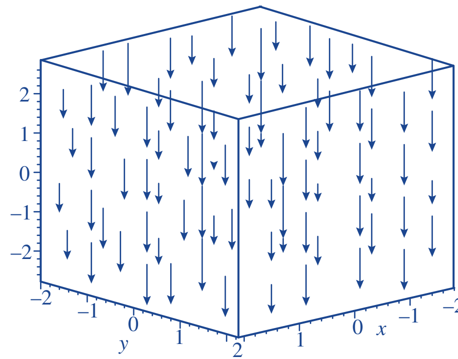


Figura 12.17. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 12.20. El flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (2 - x^2 - y^2)\vec{k}$ (v. figura 12.17) a través de la superficie S del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ si tomamos la parametrización $\vec{r}(u, v) = (u, v,\ 9 - u^2 - v^2)$, es negativa, porque:

A. $\vec{F}$ apunta hacia abajo;

B. Para cualquier punto sobre S, el ángulo entre el vector normal escogido $\vec{n}$ y el campo $\vec{F}$ es mayor que 90°.

Ejercicio 12.21. Hallar la fórmula para el área de una superficie de revolución Σ obtenida al rotar $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje y, donde $a \geq 0$.

Ejercicio 12.22. Hallar el área de superficie de revolución Σ obtenida al rotar $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje x.

Ejercicio 12.23. Hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de S, donde

1) $\vec{F}(x, y, z) = 10x\,\vec{i} + 10y\,\vec{j} + 10z\,\vec{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,

2) $\vec{F}(x, y, z) = 30y\,\vec{j} - 220z\,\vec{k}$ y S consiste en el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 5$ y el disco $x^2 + z^2 \leq 5$, $y = 5$, con orientación positiva (hacia afuera);

3) $\vec{F}(x, y, z) = 7x\,\vec{i} + 5y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ y S es el cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Ejercicio 12.24. Hallar el centro de masa del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, $z \geq 0$, con densidad constante $\rho = 85$.

Ejercicio 12.25. Un fluido con densidad 1060 fluye con velocidad $\vec{v} = y\,\vec{i} + \vec{j} + z\,\vec{k}$. Hallar el flujo hacia arriba a través del paraboloide, $z = 9 - \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 \leq 36$.

Ejercicio 12.26. La temperatura en el punto (x, y, z) dentro de una sustancia con conductividad $K = 3$ está dada por: $u = 5x^2 + 5y^2$. Hallar el flujo de calor que entra a través de la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 5$, $0 \leq x \leq 3$. Es decir, halle $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $F = -K\nabla u$.

CAPÍTULO

13 Teorema de Stokes y teorema de Gauss

13.1 Teorema de Stokes

Teorema 13.1 (Teorema de Stokes). Sea S una superficie paramétrica, orientable, suave por partes definida por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D, \tag{13.1}$$

que tiene como borde (frontera) una curva C cerrada, simple suave por partes y orientada positivamente. $\vec{F}(x, y, z)$, un campo vectorial derivable en Ω, $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \tag{13.2}$$

Nota 13.1. En la fórmula (13.2):

1) La integral del lado izquierdo es una integral de línea. Se puede interpretar así

   a) Si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas, como el *trabajo* realizado por $\vec{F}$ al mover una partícula a lo largo de la curva cerrada C.

   b) Si $\vec{F}$ es un campo de velocidades del flujo de un fluido, como la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada C.

2) La integral del lado derecho es una integral de superficie. Es el *flujo* del rotacional de $\vec{F}$ (el rotacional de un campo vectorial $\nabla \times \vec{F}$ es de nuevo otro campo vectorial) a través de la superficie S. Recuerde que

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}, \tag{13.3}$$

   donde $\vec{n}$ es un vector unitario normal a la superficie orientable S y es el que define la orientación S.

3) La orientación de la curva C y de la superficie S son *compatibles*. Es decir, la orientación escogida para S, la cual está definida por la elección del campo

vectorial normal $\vec{n}$, define la orientación de C. A esta orientación de C se le llama *orientación positiva*. Hay básicamente dos formas de *orientar positivamente* la curva C:

a) Imaginemos a un "hombrecillo con un sombrero chino" (forma de medio cono, el hombrecillo de lejos parece un vector) caminando sobre la superficie S muy cerca de la curva C, si la superficie S le queda a *mano izquierda* decimos que camina en la orientación positiva.

b) La curva C está orientada positivamente si en un punto cualquiera muy cerca de C al usar la *regla de la mano derecha* se satisface que la posición de los dedos es:

   I dedo índice es el vector tangente a C;

   II dedo del corazón está señalando la superficie S;

   III dedo pulgar es el vector normal $\vec{n}$.

13.1.1 Independencia de la superficie *S*

Podemos cambiar la superficie S con borde $C = \partial S$ por otra superficie M, siempre y cuando:

1) Las dos superficies S y M tengan el mismo borde, es decir: $C = \partial S = \partial M$.

2) Exista una familia de superficies Σ_t, con $0 \leq t \leq 1$, tal que $\Sigma_0 = S$ y $\Sigma_1 = M$, la cual define una "deformación" continua de S a M.

3) La familia Σ_t debe cumplir $\Sigma_t \subseteq \Omega$, donde Ω es el dominio de $\vec{F}$ establecido en el teorema de Stokes.

Ejemplo 13.1. Verificar el teorema de Stokes para: $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j}$. S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 4$ abajo del plano xy con orientación hacia arriba.

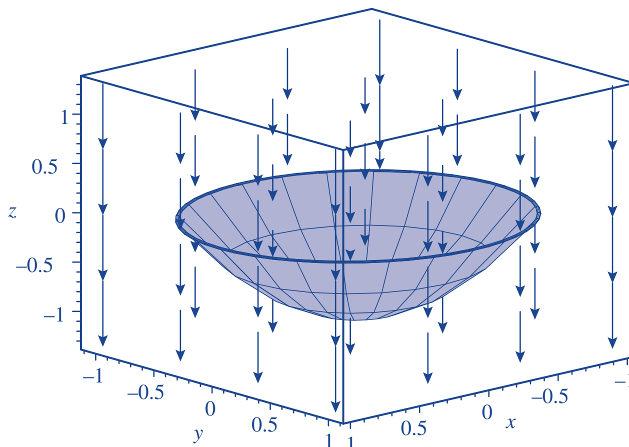


Figura 13.1. Superficie S, $z = x^2 + y^2 - 4$ y campo vectorial $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, -2)$

Verifiquemos primero las condiciones exigidas por el teorema de Stokes:

1) El campo vectorial $\vec{F}$ está definido sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3 = \Omega$ y allí es diferenciable.

2) La superficie S es suave, orientable y además parametrizada. Podemos tomar como parametrización

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 - 4), \quad (u, v) \in D, \tag{13.4}$$

donde D es el disco abierto en el plano uv con centro en el origen y radio 2.

3) Con esta parametrización tenemos la orientación definida por

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-2u, -2v, 1), \tag{13.5}$$

el cual es el campo vectorial "hacia adentro".

4) La frontera (borde) es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, la cual podemos parametrizar de manera *compatible* con la orientación de S por,

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = 0, \end{cases} \tag{13.6}$$

Ahora hagamos ciertos cálculos:

a) El rotacional del campo $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (y, -x, 0)$ es:

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (R_y - Q_z, -(R_x - P_z), Q_x - P_y) = (0, 0, -2) \tag{13.7}$$

Ver figura 13.1 en la cual se muestra la superficie S y el campo vectorial rotacional.

b) Dado que $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}$ es un campo escalar, lo podemos denotar por g. Por lo tanto el integrando de la integral de superficie gdS es igual a:

$$\begin{aligned} gdS &= \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \nabla \times \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \right) dS \\ &= \nabla \times \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \right) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| d. \qquad (13.8) \\ &= \nabla \times \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dA \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} dvdu. \end{aligned}$$

Para verificar el teorema de Stokes resolvemos separadamente el lado izquierdo de (13.2) y el lado derecho.

Lado izquierdo

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \oint_C P\,dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_C y dx - x dy \\ &= \int_0^{2\pi} (2\,\mathrm{sen}\,t)(-2\,\mathrm{sen}\,t dt) - (2\cos t)(2\cos t dt) \\ &= -4\int_0^{2\pi} dt = -8\pi.\end{aligned} \tag{13.9}$$

Lo cual significa que el trabajo neto que realiza el campo vectorial $\vec{F} = (y, -x, 0)$ para mover una partícula a lo largo de la curva C orientada positivamente es -8π. El campo vectorial $\vec{F}$ tiene como líneas de campo circunferencias concéntricas con centros sobre el eje z. En particular la curva C es una línea de campo. El negativo significa que la partícula se mueve en dirección contraria a la dirección del campo.

Lado derecho

Usando el resultado obtenido en (13.8), tenemos;

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla \vec{F} \times \vec{n} dS &= \iint_D \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} dv du \\ &= \iint_D (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dv du \\ &= -2\iint_D dv du = -2(\pi)(2)^2 = -8\pi.\end{aligned} \tag{13.10}$$

Ejemplo 13.2.

(Ejercicio resuelto). Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ un campo vectorial y C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $y + z = 2$. Calculemos la integral de línea de $\vec{F}$ sobre C. Consideraremos C como la frontera de la superficie S, región del plano $y + z = 2$ acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (región interna a una elipse).

Tomemos la parametrización del plano

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 2 - v, \tag{13.11}$$

y para los puntos de S tenemos que $u^2 + v^2 \leq 1$. Por el teorema de Stokes tenemos,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}. \tag{13.12}$$

El rotacional es

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 1 - 2y). \tag{13.13}$$

Entonces,

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{u^2+v^2 \le 1} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1+2v \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} dudv = \iint_{u^2+v^2\le 1} (1 + 2v)\, dudv. \tag{13.14}$$

Usando coordenadas polares tenemos,

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\substack{0 \le r \le 1, \\ 0 \le \theta \le 2\pi,}} (1 + 2r \operatorname{sen} \theta) r\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta) r\, dr \quad d\theta = \pi. \right] \end{aligned} \tag{13.15}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi. \tag{13.16}$$

Ejemplo 13.3. Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, \operatorname{sen}(xyz))$ y la superficie S, región superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \ge 0)$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calculemos la integral

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \tag{13.17}$$

La frontera de la región S es una circunferencia sobre el plano $z = \sqrt{3}$ (intersección de las dos superficies). Usando el teorema de Stokes podemos cambiar la superficie S por la superficie S', disco sobre el plano $z = \sqrt{3}$ interior al cilindro, el cual tiene la misma frontera que S. El rotacional es

$$\nabla \times \vec{F} = (xz \cos(xyz) - y,\ -yz \cos(xyz) + x,\ 0) \tag{13.18}$$

y el vector normal unitario a S' es $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$. Por lo tanto

$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} = 0. \tag{13.19}$$

Por lo anterior tenemos

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{13.20}$$



13.2 Teorema de Gauss-Ostrogradsky

Teorema 13.2 (**Teorema de Gauss-Ostrogradsky o teorema de la divergencia de Gauss**). Sea E una región sólida del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea S la frontera superficial de E, suave por partes, regular y con orientación positiva (hacia afuera, vector normal exterior). Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial de clase $C^1(\Omega)$, donde Ω es una región abierta que contiene a E. Entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F}\, dV. \tag{13.21}$$

Nota 13.2. En la fórmula del teorema de Gauss (13.21):

1) La integral del lado izquierdo es una integral de superficie, es el flujo hacia afuera de $\vec{F}$ a través de S. Recordemos que esta integral de superficie, o integral de flujo sobre la superficie cerrada S, se denota de dos maneras que son equivalentes:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS. \tag{13.22}$$

2) El vector normal $\vec{n}$ sobre la superficie S si es escogido hacia afuera diremos que la orientacion de S es positiva.

3) La integral del lado derecho es una integral triple de volumen sobre el sólido E.

Ejemplo 13.4

(Ejercicio resuelto). Calculemos el flujo hacia afuera de $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \text{sen}\, xy)$ a través de la superficie cerrada S, acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos: $z = 0$, $y + z = 2$. Es decir hallemos el valor de la integral de superficie (fig. 13.2),

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \tag{13.23}$$

Usando el teorema de Gauss, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = 3y \\ \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} 3y\, dydzdx = \frac{184}{35}. \end{aligned} \tag{13.24}$$

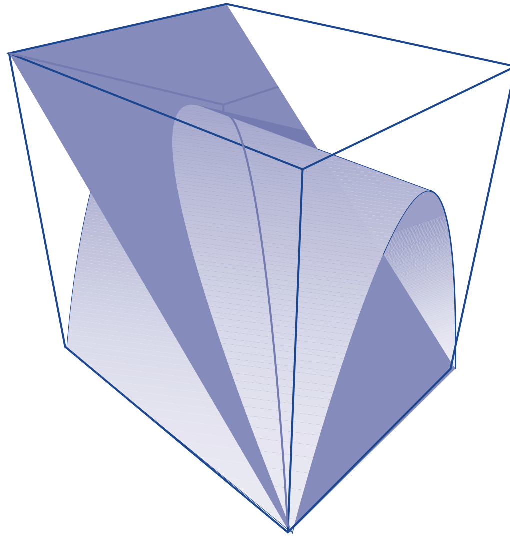


Figura 13.2. Ejemplo 13.4



Ejemplo 13.5. Calculemos el flujo hacia afuera de $\vec{F} = (z, y, x)$ a través de la esfera S, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Es decir, hallemos el valor de la integral de superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \tag{13.25}$$

La divergencia de este campo vectorial es igual a 1 y por lo tanto, usando el teorema de Gauss, podemos concluir que la integral triple de volumen es el volumen de la esfera. Luego:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 36\pi. \tag{13.26}$$

Nota 13.3. Recorderis 1:

1) Para cualquier función f de clase C^2

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}, \tag{13.27}$$

es decir, el rotacional del gradiente de una función $f \in C^2$ es el vector cero.

2) **Campo vectorial conservativo:** Bajo el supuesto de que el dominio de $\vec{F}$ sea una región simplemente conexa, $\vec{F}$ es un *campo vectorial conservativo* si y sólo si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Nota 13.4. Recorderis 2:

1) Para cualquier campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0, \tag{13.28}$$

es decir, la divergencia del rotacional de un campo $\vec{F}$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ es cero.

2) **Consecuencia.** Si $\vec{F}$ es de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ con $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, entonces existe un campo vectorial $\vec{G}$ de clase C^2 tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$.

3) **Cuidado.** El campo gravitacional satisface que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, sin embargo no existe ningún campo $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$. Esto no contradice el ítem anterior, pues el dominio del campo gravitacional no es $\mathbb{R}^3$, es $\mathbb{R}^3/\{(0, 0, 0)\}$. En el origen del sistema de coordenadas el campo gravitacional no está definido y tiene aquí una singularidad.

4) ¿Cómo hallar $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ si éste existe? $\vec{G}$ existe si $\vec{F}$ es un campo vectorial incompresible, $(\nabla \cdot \vec{F} = 0)$. Una fórmula útil para hallar $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ es: $\vec{G} = G_1\vec{i} + G_2\vec{j} + G_3\vec{k}$ donde

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t)dt - \int_0^y F_3(x, t, 0)dt, \tag{13.29}$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t)dt, \tag{13.30}$$

$$G_3(x, y, z) = 0. \tag{13.31}$$

5) Una consecuencia del teorema de Gauss es: si un campo vectorial $\vec{F}$ es incompresible, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, entonces los flujos de $\vec{F}$ a través de dos superficies con frontera común son iguales.

Ejemplo 13.6

(Ejercicio resuelto). Demostrar que si S es una superficie cerrada y $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{13.32}$$

Por el teorema de Gauss 13.21 tenemos

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} \, dV. \tag{13.33}$$

Luego usando el resultado del teorema del capítulo 11 (teorema 11.10), obtenemos lo que queremos demostrar.

♦

Ejemplo 13.7

(Ejercicio resuelto). Consideremos el campo vectorial $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$. Evaluemos la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre la esfera unitaria.

Aplicando el teorema de Gauss tenemos,

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV. \tag{13.34}$$

Luego haciendo un cambio de coordenadas a coordenadas esféricas tenemos

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{12\pi}{5}. \tag{13.35}$$

Ejemplo 13.8

(Ejercicio resuelto). Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ y sea S una superficie cerrada tal que $\vec{F}$ es tangente en cada punto de S. Demostrar

$$\iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \, dV = 0, \tag{13.36}$$

donde E es el sólido que encierra S.

Por el teorema de Gauss tenemos

$$\iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \text{Flujo neto de } \vec{F} \text{ a través de } S, \tag{13.37}$$

pero $\vec{F}$ no atraviesa la superficie, por lo tanto el flujo neto es cero.

Ejemplo 13.9

(Ejercicio resuelto). Hallar el flujo neto hacia afuera de $\vec{F} = (1, 1, z)$ a través del cilindro S, $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

A pesar de que este problema puede resolverse simplemente resolviendo la integral de superficie le daremos un tratamiento diferente.

La superficie dada no es cerrada pues al cilindro le faltan las dos tapas. Sea $S^* = S \cup D_1 \cup D_2$, donde D_1 es la tapa inferior ($x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$) y D_2 es la tapa superior ($x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$). Por lo tanto,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}^*\,dS - \iint_{D_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS - \iint_{D_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_2\,dS. \quad (13.38)$$

Es decir, el flujo de $\vec{F}$ a través del cilindro sin tapas es igual al flujo a través del cilindro tapado con ambas tapas (superficie cerrada) menos el flujo a través de la tapa inferior menos el flujo a través de la tapa superior.

La primera integral la podemos resolver usando el teorema de Gauss:

$$\iint_{S^*} \vec{F}\cdot\vec{n}^*\,dS = \iiint_E \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iiint_E 1\,dV = \text{Vol}(E) = \pi. \quad (13.39)$$

En la segunda integral $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$ y $\vec{F}$ en esta tapa es: $(1, 1, 0)$. Por lo tanto $\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = 0$, es decir el flujo a través de la tapa inferior es cero.

En la tercera integral $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ y $\vec{F}$ en esta tapa es: $(1, 1, 1)$. Por lo tanto $\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = 1$, es decir el flujo a través de la tapa superior numéricamente es igual al área de esta tapa, es decir igual a π.

Por lo tanto, el flujo neto a través del cilindro dado es $\pi - \pi = 0$.

13.3 Ejercicios del capítulo 13

Ejercicios recomendados: 1, 2, 4, 6, 7-10, 12, 13, 14, 15

Ejercicio 13.1. Verificar el teorema de Stokes para: $\vec{F}(x, y, z) = 3y\vec{i} + 4z\vec{j} - 6x\vec{k}$. S es la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ arriba del plano xy con orientación hacia arriba.

Ejercicio 13.2. Verificar el teorema de Stokes para: $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. S es el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con orientación hacia arriba.

Ejercicio 13.3. Verificar el teorema de Stokes para: $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$. S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que está en el primer octante con orientación hacia arriba.

Ejercicio 13.4. Falso (F) o verdadero (V).

1) Existe f tal que $\vec{F} = \nabla f$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + \text{sen}\,x)\vec{i} + (x^2z)\vec{j} + (x^2y)\vec{k}$.

2) Existe f tal que $\vec{F} = \nabla f$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xy)\vec{i} + (y)\vec{j} + (z)\vec{k}$.

3) Existe $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla\times\vec{G}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz)\vec{i} - (yz)\vec{j} + (y)\vec{k}$.

4) Existe $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla\times\vec{G}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y^2)\vec{i} + (z^2)\vec{j} + (x^2)\vec{k}$.

5) Existe $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \nabla\times\vec{G}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xe^y)\vec{i} - (x\cos z)\vec{j} - (ze^y)\vec{k}$.

Ejercicio 13.5. 1) Sea $\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$. Evaluar la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre la esfera unitaria centrada en el origen con orientación positiva.

2) Sea $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Evaluar la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre el cubo de lado 2 con centro en el origen y caras paralelas a los planos coordenados con orientación positiva.

3) Sea $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de la caja acotada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$ con orientación positiva.

4) Calcular el flujo de $\vec{F}\,(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ a través de la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.

Ejercicio 13.6. Use el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde

$$F(x, y, z) = xz^2\vec{i} + \left(\frac{1}{3}y^3 + \tan z\right)\vec{j} + (x^2z + y^2)\vec{k}$$

y S es el casco superior de la esfera (semiesfera) orientada hacia arriba

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad z \geq 0$$ (**nota:** la superficie no es cerrada).

Metodología: Para resolver este problema cierre la superficie con una tapa inferior, calcule la integral para la superficie cerrada (use teorema de Gauss), luego reste el flujo a través de la tapa. Escoja adecuadamente la orientación de la tapa.

Ejercicio 13.7. Sea S la parte del paraboloide

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

orientada hacia arriba (fig. 13.3).

Una parametrización del borde $C = \partial S$ con *orientación compatible* a la de S es:

A. $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$;

B. $\vec{r}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$;

C. $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0)$;

D. $\vec{r}(t) = (3\cos t, -3\operatorname{sen} t, 0)$;

donde $0 \leq t \leq 2\pi$.

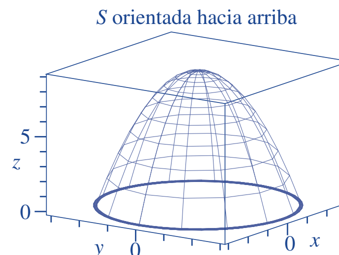


Figura 13.3. Ejercicio 13.7

Ejercicio 13.8. Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$$

El rotacional $\nabla \times \vec{F} = ?$

A. $(-4, 6, -3)$;

B. $(-4, -6, -3)$;

C. $(0, 0, 0)$;

D. 0.

Ejercicio 13.9. Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$$

y sea C el borde de la superficie S:

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

orientada hacia arriba. Si la orientación de C es compatible con la de S, entonces la integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

es igual a:

A. $-\frac{27}{2}\int_0^{2\pi}[1 + \cos(2t)]dt$;

B. $\frac{27}{2}\int_0^{2\pi}[1 - \cos(2t)]dt$;

C. $-\frac{27}{2}\int_0^{2\pi}[1 - \cos(2t)]dt$;

D. $\frac{27}{2}\int_0^{2\pi}[1 + \cos(2t)]dt$

Ejercicio 13.10. Sean S y M las superficies mostradas (fig. 13.4), ambas orientadas hacia arriba y

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$$

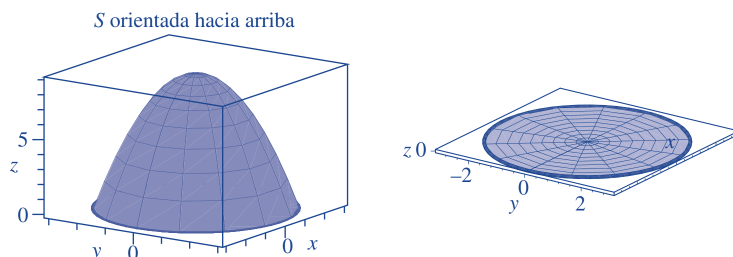


Figura 13.4. Ejercicio 13.10

Entonces

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

A. Falso

B. Verdadero

Ejercicio 13.11. Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$$

y sea S la superficie

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

orientada hacia arriba. La integral de superficie

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = ?$$

A) 0;

B) 27π;

C) $-\frac{27}{2}\pi$;

D) -27π.

Ejercicio 13.12. Use el teorema de Stokes para calcular la integral

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

donde

1) $\vec{F} = \left(8x + 8\arctan\frac{y}{z}\right)\vec{i} + y^2z\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la parte del hemisferio $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ orientada en la dirección del eje x positivo;

2) $\vec{F} = 3xyz\ \vec{i} + 3xy\ \vec{j} + 3x^2yz\ \vec{k}$ y S es la superficie compuesta por la tapa inferior y los cuatros lados laterales del cubo con vértices $(\pm 7, \pm 7, \pm 7)$ orientado hacia afuera;

3) $\vec{F} = 8xy\,\vec{i} + 8e^z\,\vec{j} + 8xy^2\,\vec{k}$ y S consiste en los cuatro lados de la pirámide con vértices (0, 0, 0), (5, 0, 0), (0, 0, 5), (5, 0, 5) y (0, 5, 0) que están a la derecha del plano xz, orientados en la dirección del eje y positivo;

4) $\vec{F} = 3(x + y^2)\,\vec{i} + 4(y + z^2)\,\vec{j} + 6(z + x^2)\,\vec{k}$ y C es el triángulo con vértices (8, 0, 0), (0, 8, 0) y (0, 0, 10) orientado en contra de las manecillas del reloj visto desde arriba;

5) $\vec{F} = e^{-6x}\,\vec{i} + e^{5y}\,\vec{j} + e^{2z}\,\vec{k}$ y C es el contorno del plano $3x + y + 3z = 3$ en el primer octante;

6) $\vec{F} = 7z\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} + 6y\,\vec{k}$ y C es la curva de intersección entre el plano $z = x + 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$;

7) $\vec{F} = 8x^2z\,\vec{i} + 8xy^2\,\vec{j} + 6z^2\,\vec{k}$ y C es la curva de intersección entre el plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ orientada en contra de las manecillas del reloj vista desde arriba;

8) $\vec{F} = x^2y\,\vec{i} + \frac{1}{3}x^3\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ y C es la curva de intersección entre el paraboloide de hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientada en contra de las manecillas del reloj vista desde arriba;

9) $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región que contiene a S y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$;

10) $\vec{F} = 8yz\,\vec{i} + 8xz\,\vec{j} + 8xy\,\vec{k}$ y S es la parte del paraboloide $z = 13 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = 9$ orientada hacia arriba;

11) $\vec{F} = x^2e^{yz}\,\vec{i} + y^2e^{xz}\,\vec{j} + z^2e^{xy}\,\vec{k}$ y S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Ejercicio 13.13. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F} = (x^x + 18z^2)\,\vec{i} + (y^y + 4x^2)\,\vec{j} + (z^z + 8y^2)\,\vec{k}$ cuando una partícula se mueve bajo su influencia alrededor del borde de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra en el primer octante, en dirección contraria a las manecillas del reloj vista desde arriba.

Ejercicio 13.14. Use el teorema de Gauss para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S, donde:

1) $\vec{F} = (x^3 + y\cos z)\,\vec{i} + (y^3 + z\tan x)\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ y S es la superficie acotada por los hemisferios $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$;

2) $\vec{F} = e^y \operatorname{sen} z\,\vec{i} + y(3 - x^2)\,\vec{j} + x\operatorname{sen} y\,\vec{k}$ y S es la superficie del sólido que se encuentra arriba del plano xy y debajo de la superficie $z = 4 - x^4 - y^4$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$;

3) $\vec{F} = xz^2\,\vec{i} + \left(\frac{1}{3}y^3 + \cos z\right)\vec{j} + (x^2z + y^2)\,\vec{k}$ y S es la superficie de la mitad superior de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

4) $\vec{F} = z \operatorname{arcsen} y^2 \vec{i} + z^7 \ln(x^8 + 2) \vec{j} + 2z \vec{k}$ y S es la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 10$ que se encuentra sobre el plano $z = 1$ orientada hacia arriba.

5) $\vec{F} = 2x \vec{i} + 2xy \vec{j} + 4xz \vec{k}$ y S es la caja acotada por los planos $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$;

6) $\vec{F} = xz \vec{i} + yz \vec{j} + 3z^2 \vec{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 9$;

7) $\vec{F} = xy \vec{i} + yz \vec{j} + xz \vec{k}$ y S es la superficie del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 25$, $0 \leq z \leq 4$.

8) $\vec{F} = 3xy^2 \vec{i} + 5xe^z \vec{j} + z^3 \vec{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 16$ y los planos $x = -4$ y $x = 5$.

9) $\vec{F} = x^3 y \vec{i} - c^2 \vec{j} - x^2 yz \vec{k}$, $c \in \mathbb{R}$ y S es la superficie del sólido acotado por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 10$ y los planos $z = -5$ y $z = 5$;

10) $\vec{F} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

11) $\vec{F} = x^3 \vec{i} + 2xz^4 \vec{j} + 3y^2 z \vec{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

Ejercicio 13.15. Calcule el valor de la integral de superficie

$$\iint_S (7x + 5y + 9z^2)\, dS,$$

donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

CAPÍTULO 14

Apéndices

14.1 Ejemplo de primer parcial[1]

Ejercicio 14.1. 1) Halle

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

en el punto $(x, y, z) = (3, 0, -2)$, donde z está definida implícitamente $z = f(x, y)$ por la ecuación:

$$yz = \ln(x + z)$$

2) Dada la curva C parametrizada por,

$$\vec{r}(t) = (\text{sen}\, t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, t), \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

encuentre la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto $P(0, 2, 0)$.

3) Considere las siguientes funciones, curvas de nivel (CN)[2] y gráficas (gráf.) que se muestra en la página siguiente.

Llene la siguiente tabla de modo que por renglones corresponda a la respuesta correcta.

$f(x, y)$	**CN: I), II), III), IV) o V)**	**Gráf.: A), B), C), D) o E)**
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

[1] Realizado el 11 de septiembre del 2011. Tiempo: 70 minutos.

[2] Las curvas de nivel mostradas son para valores de $c = a, a + 1, a + 2, \ldots, a \in \mathbb{Z}$.

a)	$f = x^2 + y^2$	I)		A)	
b)	$f = \cos(x^2 + 2y^2)$	II)		B)	
c)	$f = x^2 - 2y^2$	III)		C)	
d)	$f = x + y^2$	IV)		D)	
e)	$f = \operatorname{sen}(x - y)$	V)		E)	

Ejercicio 14.2. Llene la casilla en blanco con F (falso) o V (verdadero), según sea el caso.

1) La curva $x^2 + 2y^2 = 1$ tiene curvatura constante. . . . . ☐

2) Las expresiones

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \text{ sen } t, t), \qquad \vec{r}_2(s) = (\cos s, -\text{ sen } s, -s)$$

representan la misma curva . . . . ☐

3) El gradiente de $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ y la curva de nivel $f(x, y) = 75$ en el punto $P(5, 0)$ forman un ángulo de cero grados. . . . . ☐

4) La función $f(x, y, z) = x^2 + yz$ crece lo más rápido posible en la dirección $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en el punto $P(1, 2, 2)$ . . . . ☐

Ejercicio 14.3. Sea $f(x, y, z) = 75 + x^2 + y^2 + z$. Considere la superficie de nivel

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 100\}.$$

Encuentre la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P(1, 2, 20)$. Escriba su respuesta en la forma simplificada: $ax + by + cz = d$.

Ejercicio 14.4. Considere las funciones

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \qquad g(x, y) = y - \cos x.$$

1) En un mismo plano xy dibuje las curvas de nivel de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ que pasan por el punto $P(0, 1)$.

2) Encuentre el valor del ángulo θ de intersección de las dos curvas de nivel del ítem anterior.

14.2 Ejemplo de segundo parcial[3]

Ejercicio 14.5. Llene la siguiente tabla de tal manera que por renglones corresponda a la respuesta correcta, de las integrales y los sólidos de dos en la tabla de la página siguiente.

Integral de volumen de E	Gráf. de E: I), II), III) o IV)
a)	
b)	
c)	
d)	

[3] Realizado el 29 de octubre del 2011. Tiempo: 70 minutos.

a)	$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\pi/4} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi d\rho \, d\theta$	I)	
b)	$\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz dr \, d\theta$	II)	
c)	$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi \, d\theta$	III)	
d)	$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{1} r \, dz dr \, d\theta$	IV)	

Tabla 14.1. Ejercicio 14.5

Ejercicio 14.6. Halle el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de la media bola E,

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \qquad (z \geq 0),$$

con densidad constante igual a 1, $\delta(x, y, z) = 1$. Es decir,

1) calcule $\bar{x}$,

2) calcule $\bar{y}$,

3) calcule $\bar{z}$.

Respuesta sin justificar no se tendrá en cuenta (**ayuda:** vea las fórmulas en el pie de página[4] y puede usar simetrías de E si lo estima necesario).

Ejercicio 14.7. Considere la transformación T dada por

$$T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \mapsto (x,y)\begin{cases} x = 2u - v, \\ y = u - v, \end{cases}$$

y la región R en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices en $A = (0,\ 0)$, $B = (1,\ 1)$, $C = (3,\ 2)$ y $D = (2,\ 1)$.

1) Dibuje las regiones R en el plano xy (use la gráfica de la derecha) y la región S en el plano uv (use la gráfica de la izquierda), de tal manera que

$$R = T\,(S).$$

2) Calcule el jacobiano de la transformación T, es decir calcule

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

3) Evalúe la integral doble

$$\iint_R (x - y)\ dA$$

usando el teorema de cambio de variables.

Ejercicio 14.8. Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de

$$f\,(x,\ y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2,$$

en el disco $x^2 + y^2 \leq 45$.

[4] Fórmulas:

$$m = \iiint_E \delta(x,y,z)dV\ ,\ \bar{x} = \frac{\iiint_E x\delta(x,y,z)\,dV}{m},$$
$$\bar{y} = \frac{\iiint_E y\delta(x,y,z)\,dV}{m},\ \bar{z} = \frac{\iiint_E z\delta(x,y,z)\,dV}{m}.$$

14.3 Ejemplo de examen final[5]

Ejercicio 14.9. Llene las casillas en blanco con F o V en caso de que la proposición sea falsa o verdadera.

1) La curva $\vec{r}(t) = t^5\vec{i} + t^5\vec{j} + t^5\vec{k}$, $(t \in \mathbb{R})$, es una línea recta . . . . ☐

2) $8e^{-34} \leq \int_1^5 \int_1^3 e^{-(x^2+y^2)}\, dydx \leq 8e^{-2}$

3) Si $\vec{F} = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y, -2 \operatorname{sen} z)$, entonces $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. . . . . ☐

4) $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5$ tiene mínimo local en $(1, 2)$. . . . . . . ☐

5) La ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es $x + y + z = 3$. . . . . ☐

Ejercicio 14.10. Considere el siguiente campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

y la curva C definida como el segmento de recta que va desde el punto $A(2, 0, 0)$ hasta el punto $B(1, 2, 3)$.

1) Compruebe que $\vec{F}$ es irrotacional, es decir compruebe que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

2) Halle un potencial $f(x, y, z)$ (campo escalar) de $\vec{F}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

3) Complete el enunciado del teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

   Teorema. Sea C una curva suave dada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, $(a \leq t \leq b)$. Sea f una función derivable de dos o tres variables con vector gradiente ∇f continuo en C. Entonces, . . .

4) Calcule

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ejercicio 14.11. Considere el siguiente campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}.$$

[5] Realizado el 26 de noviembre del 2011. Tiempo: 120 minutos.

y la superficie S de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el vector normal hacia afuera.

1) Calcule la divergencia $\nabla \cdot \vec{F}$.

2) Complete el enunciado del teorema de Gauss en general.

   Teorema. Sea E una región sólida simple en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie frontera de E dada con la orientación positiva (hacia afuera). Sea $\vec{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces, . . .

3) Plantee la integral triple, según el teorema de Gauss, cuyo valor es el flujo de $\vec{F}$ a través de S dados. Es decir, usando cualquier tipo de coordenadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas), plantee llenando los espacios vacíos la integral triple. No deje nada indicado ni casillas sin llenar.

$$\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} \boxed{}\, d\square\, d\square\, d\square$$

4) Halle el flujo del campo vectorial, dado $\vec{F}$, a través de la superficie dada S, es decir calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Ejercicio 14.12. Considere el sólido E en el *primer octante* dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, cuya densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

1) Plantee la integral triple que representa la masa de E. Use cualquier tipo de coordenadas.

2) Usando el planteamiento anterior calcule la masa m de E.

Ejercicio 14.13. Considere la siguiente función,

$$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - xy.$$

1) Encuentre los puntos críticos de f.

2) Clasifique los puntos críticos donde la función tiene máximo local, mínimo local o punto de silla.

3) Encuentre los valores α (máximo de f) y β (mínimo de f) que obtiene f en el disco $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

14.4 Ejemplo de tarea 1[6]

Ejercicio 14.14. Encuentre una parametrización de la recta que es intersección de los planos:

$$3x - 2y + z = 7, \quad \text{y,} \quad x + 2y + 3z = -3.$$

Ejercicio 14.15. Encuentre la distancia entre las dos rectas $\vec{r}_1(t) = t(1, 2, -1)$ y $\vec{r}_2(t) = (0, 1, 0) + t(1, 1, 1)$.

Ejercicio 14.16. 1) Muestre que la función $u(t, x) = \cos(2t - x) + \operatorname{sen}(2t - x)$ satisface la ecuación diferencial,

$$u_{tt} = u_{xx} - 3_u$$

donde $u_{tt} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$.

2) Describa las curvas de nivel.

3) Encuentre una parametrización de la curva de nivel $u(t, x) = 1$

Ejercicio 14.17. Considere la función $z = f(x, y)$ definida por la ecuación

$$e^x(\cos y + 1) - 2z = -2$$

y el punto $P(0, 0, 2)$. Sea Σ la superficie que representa geométricamente esta función.

1) Muestre que $P \in \Sigma$.

2) Encuentre la ecuación del plano tangente a Σ en P.

3) Encuentre una parametrización de la recta normal a Σ en P.

4) Halle la dirección unitaria u para la cual la pendiente de la superficie en esa dirección es 1.

Ejercicio 14.18. Considere la función vectorial $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, -4t)$. Halle la longitud de arco de la curva entre los puntos $t = 0$, y, $t = \pi/2$.

Ejercicio 14.19. Diga por qué la ecuación $4x^2 + y^2 - z^3 + 3 = 0$ define una función $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(1, 1)$ donde $f(1, 1) = 2$. Use este hecho para calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1).$$

[6] Realizada en el segundo semestre del 2011.

Ejercicio 14.20. La temperatura T en un punto $P\ (x, y)$ del plano xy está dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 1}$$

1) Describa las curvas de nivel.

2) ¿Cuál es el punto P más caliente? Encuentre la temperatura en ese punto.

3) ¿Cuál es la dirección en que crece lo más rápido posible la temperatura?

Ejercicio 14.21. Sea C la curva que es intersección entre las dos superficies $2y = x^2$ y $3z = xy$. Calcule la longitud de la curva C desde el origen hasta el punto (6, 18, 36).

Ejercicio 14.22. Considere la superficie Σ con ecuación $z = e^{x-y}$ y el punto $P(1, 1, 1)$ en Σ. Halle el punto sobre el eje z en el cual el plano tangente a Σ en P cruza este eje.

Ejercicio 14.23. Sea $z = x + f(u)$ donde $u = xy$. Muestre que se satisface la siguiente ecuación:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

Ejercicio 14.24. La ecuación $x^2 + \frac{1}{2}y^4 z + z^3 = 0$ define una función $z = f(x, y)$ implícitamente. Use la derivación implícita para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto $(x, y) = (3, 1)$.

Ejercicio 14.25. Considere la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$$

Considere la superficie de nivel

$$S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 18\}.$$

Encuentre la ecuación del plano tangente a S en el punto (3, 2, 1). Escriba su respuesta en la forma $ax + by + cz = d$.

Ejercicio 14.26. Encuentre una ecuación vectorial o una ecuación paramétrica para la recta tangente a la curva $x = t^4$, $y = 2\ln t$, $z = e^{2t}$, en el punto $(1, 0, e^2)$.

Ejercicio 14.27. Suponga que una partícula viaja a lo largo de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t), 3t)$ desde el punto (1, 0, 0) hasta el punto que ha completado 5 vueltas completas de la hélice. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula?

Ejercicio 14.28. Suponga que z está definida implícitamente como una función de x y y por

$$x^2 e^y z = x\cos y + \cos z.$$

Halle $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Su respuesta podría involucrar las variables x, y y z.

Ejercicio 14.29. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = xye^{-xy^2}$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección $\vec{u} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Ejercicio 14.30. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y) = xye^{-xy^2}$ en el punto $(1, 1, e^{-1})$.

Ejercicio 14.31. Considere las siguientes funciones, gráficas y curvas de nivel.

a)	$f(x, y) = x^2 - y^2$	I)		A)	
b)	$f(x, y) = 10xy\, e^{-x^2-y^2}$	II)		B)	
c)	$f(x, y) = \dfrac{5}{x^2 + 2y^2 + 1}$	III)		C)	
d)	$f(x, y) = x + 2y$	IV)		D)	
e)	$f(x, y) = \operatorname{sen}(3y)$	V)		E)	

Con la anterior información llene la siguiente tabla de tal manera que por renglones corresponda a la respuesta correcta.

Función	Gráfica	Curvas de nivel
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

Ejercicio 14.32. Considere las funciones

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad g(x, y) = \frac{5}{x^2 + 2y^2 + 1}.$$

1) En un mismo plano dibuje las curvas de nivel de $f(x, y)$ y de $g(x, y)$ que pasan por el punto $(1, 1)$.

2) Use los gradientes de $f(x, y)$ y de $g(x, y)$ para encontrar el ángulo de intersección entre estas curvas de nivel.

Ejercicio 14.33. Considere $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función derivable, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, un vector unitario, $P = (p_1, p_2) \in D$, un punto, y $\nabla f(P) = (a, b)$ el vector gradiente en P. Llene los espacios en blanco.

1) La dirección hacia donde la función decrece con la mayor tasa de cambio es:

______________________________ (respuesta en términos de a y b).

2) Una dirección en donde el crecimiento es cero es:

______________________________ (respuesta en términos de a y b).

3) La ecuación que relaciona derivada direccional con el vector gradiente es:

____

4) El vector gradiente es siempre perpendicular a:

______________________________ (respuesta en palabras).

5) La derivada direccional $D_{\vec{u}}(P)$ está definida por:

$\lim_{h \to 0}$ ______________________________ (llene el numerador y el denominador de la fracción).

14.5 Ejemplo de tarea 2[7]

Ejercicio 14.34. Encuentre, si existen, los máximos locales, mínimos locales y puntos de silla de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10.$$

Ejercicio 14.35. Una canal se hace con una placa metálica galvanizada de w cm de ancho doblando de manera simétrica sus esquinas a x cm del borde. La sección transversal es mostrada en la figura 14.1.

1) Determine las dimensiones para que el flujo transportado sea máximo. Es decir determine las dimensiones de x (parte que se va a doblar) y θ (ángulo entre x y el nivel máximo del agua) para que el área transversal sea máxima.

2) ¿Sería mejor hacer la canal con área transversal un semicírculo o como la del ítem anterior?

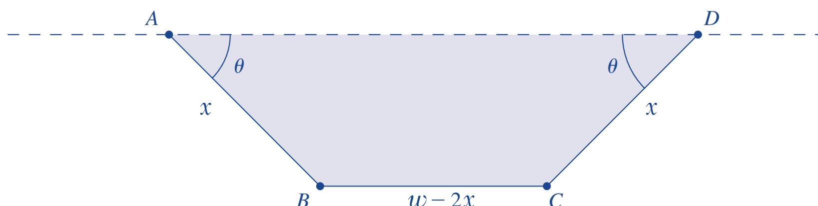


Figura 14.1. Ejercicio 14.35

Ejercicio 14.36. Se va a cortar y adornar un espejo de forma rectangular con área 1 metro cuadrado. Si los adornos a lo largo de los lados horizontales cuestan 100 pesos por centímetro y los de los lados verticales cuestan 150 pesos por centímetro, hallar las dimensiones que minimicen el costo total.

Ejercicio 14.37. Un servicio de entrega de paquetes requiere que las dimensiones de una caja paralelepípeda (caras rectangulares) sean tales que la longitud (l) más el doble del ancho (a) más el doble de la altura (h) no pase de 108 centímetros, es decir $l + 2a + 2h \leq 108$. ¿Cuál es el volumen de la caja más grande que podrá enviar la compañía?

Ejercicio 14.38. Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

en el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.

[7] Realizada en el segundo semestre del 2011.

Ejercicio 14.39. Halle $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\, dxdy$.

Ejercicio 14.40. Calcule el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ y los "lados verticales de R".

Ejercicio 14.41. Sea D el círculo unitario. Evaluar $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$.

Ejercicio 14.42. Halle el valor de la integral $\iint_R x dA$, donde R es la región anular (anillo) del plano xy acotada por los círculos centrados en el origen y de radios 1 y 4.

Ejercicio 14.43. Halle el valor de la integral $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$, donde R es el círculo $x^2 + y^2 \leq 16$.

Ejercicio 14.44. Halle el volumen del sólido acotado por el cilindro circular $r = 2a \cos\theta$, el cono $z = r$ y el plano $z = 0$.

Ejercicio 14.45. Halle el volumen del sólido en el primer octante limitado por los cilindros $y^2 = ax$ y $x^2 = ay$, y que se halla debajo del plano $z = x + y$.

Ejercicio 14.46. Evalúe la integral doble $\iint_R 4(x^2 + y^2) dA$ donde R es la región del plano sobre y dentro del cuadrado cuyos vértices están en $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ y $(-1, 0)$ (**ayuda:** use el cambio de coordenadas: $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$).

Ejercicio 14.47. Calcule el área de la porción del cono $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ localizada en el primer octante y limitada por los planos $x = 0$, $z = 0$ y $2x + z = 8$.

Ejercicio 14.48. Considere la siguiente integral triple:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dzdydx.$$

1) Haga un dibujo de la región en $3D$ (sólido) de integración.

2) Plantee las 5 integrales triples iteradas restantes según los diferentes órdenes para el diferencial de volumen.

Ejercicio 14.49. Encuentre la región E tal que la integral triple

$$\iiint_E \left(1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2\right) dV$$

tiene valor máximo.

Ejercicio 14.50. Considere el sólido E en el primer octante acotado por las superficies $z = 1 - x^2$, $y = 1 - x$ y los planos coordenados.

1) Haga un dibujo del sólido E.

2) Plantee la integral triple,

$$\iiint_E xyz^2\,dV$$

en sus seis formas diferentes según el orden del diferencial de volumen dV.

3) Resuelva cada una de las integrales anteriores.

Ejercicio 14.51. Encuentre el valor promedio de $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo de lado L ubicado en el primer octante con un vértice en el origen del sistema coordenado y las caras sobre los planos coordenados (el cubo está en el primer octante).

Ejercicio 14.52. Sea S el sólido limitado por la esfera con radio 1 y centro en el origen (bola unitaria). Evalúe

$$\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV.$$

Ejercicio 14.53. Sea E la región definida por $x^2 + 4y^2 \leq 4$. Evalúe

$$\iint_E x^2\,dA.$$

Ejercicio 14.54. Sea P el sólido en el primer octante acotado por los planos $x = y$, $y = 4$, $y + 2z = 4$, $z = 0$. Suponga que este sólido tiene función de densidad $\rho(x, y, z) = 1$. Encuentre el centro de masa del sólido.

Ejercicio 14.55. Considere en el espacio tridimensional los cilindros: $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.

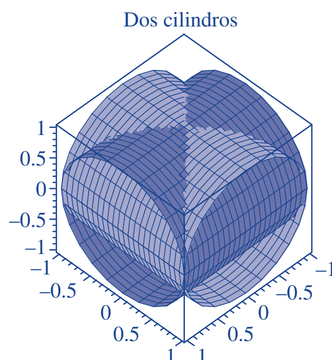


Figura 14.2. Ejercicio 14.55

1) Plantee la integral con todos sus límites para hallar el área de la superficie de intersección en coordenadas cartesianas en el primer octante.

2) Plantee la integral con todos sus límites para hallar el volumen del sólido acotado por la intersección de los dos cilindros en el primer octante usando,

   a) coordenadas cartesianas,

   b) coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 14.56. Considere los tres cilindros en el espacio tridimensional: $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.

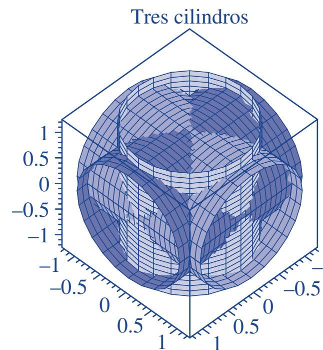


Figura 14.3. Ejercicio 14.56

Encuentre el volumen del sólido acotado por los tres cilindros.

Ejercicio 14.57. Use coordenadas esféricas para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Ejercicio 14.58. Calcule la masa del tronco del cono $x^2 + y^2 = z^2$ acotado por los planos $z = 0$, $z = 1$ si la densidad de masa es constante e igual a $\rho = 4$ kg por metro cúbico.

14.6 Ejemplo de tarea 3[8]

Ejercicio 14.59. Se tiene una placa plana metálica de la forma de un cuadrado de lado un metro. Se ha medido la temperatura en muchos puntos y el resultado de esta medida se muestra en la siguiente tabla en grados centígrados $T(x, y)$

[8] Realizada en el segundo semestre del 2011.

y \ x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1.0	1.4	3.0	5.3	8.1	11.2
2.0	2.2	5.7	10.4	16.0	22.4
3.0	3.2	8.5	15.6	24.0	33.6
4.0	4.1	11.4	20.8	32.0	44.7
5.0	5.1	14.2	26.0	40.0	55.9

Use la tabla anterior para hallar:

1) una aproximación de $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ en el punto (3.0, 3.0);

2) una aproximación lineal (linearización) de $T(x, y)$ en el punto (3.0, 3.0);

3) use el resultado del punto anterior para estimar la temperatura en (3.5, 3.5);

Ejercicio 14.60. La figura 14.4 muestra 16 curvas de nivel de una función $f(x, y)$ con valores de $f(x, y)$ iguales a
$-2, -7/4, -3/2, -5/4, -1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4, 3/2,$
$7/4, 2$ de derecha a izquierda respectivamente.

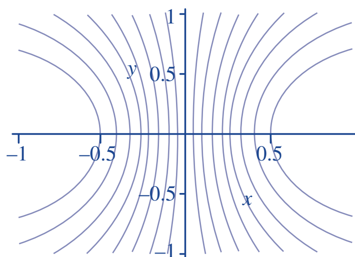


Figura 14.4. Curvas de nivel de $z = f(x, y)$

Use la figura anterior para dar un estimativo de las derivadas parciales $fx(0.5, 0.5)$ y $fy(0.5, 0.5)$.

Ejercicio 14.61. Las figuras 14.5 y 14.6 representan campos vectoriales planos $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, donde P y Q son suaves en todo el plano $\mathbb{R}^2$ y C una curva orientada en sentido antihorario (positiva).

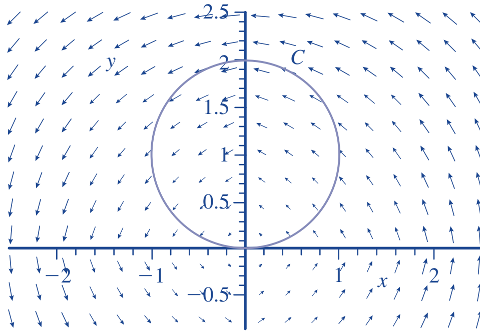


Figura 14.5

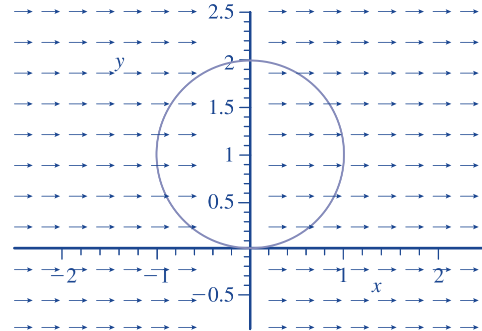


Figura 14.6

1) ¿El valor de la integral $\oint_C Pdx + Qdy$ en la figura 14.5 es positivo, negativo o cero?

2) ¿El valor de la integral $\oint_C Pdx + Qdy$ en la figura 14.6 es positivo, negativo o cero?

3) ¿El rotacional del campo en el origen en la figura 14.5 es positivo, negativo o cero?

4) ¿El rotacional del campo en el origen en la figura 14.6 es positivo, negativo o cero?

5) ¿El campo vectorial de 14.5 es conservativo?

6) ¿El campo vectorial de 14.6 es conservativo?

Las figuras 14.7, 14.8, 14.9 y 14.10, representan campos vectoriales planos $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, donde P y Q son suaves en todo el plano $\mathbb{R}^2$.

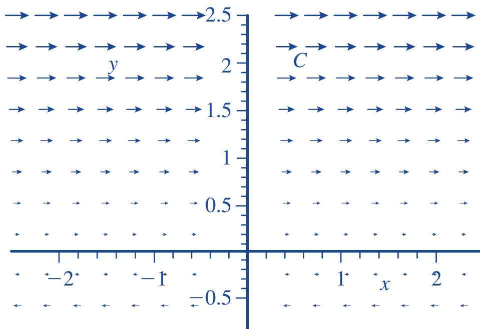


Figura 14.7

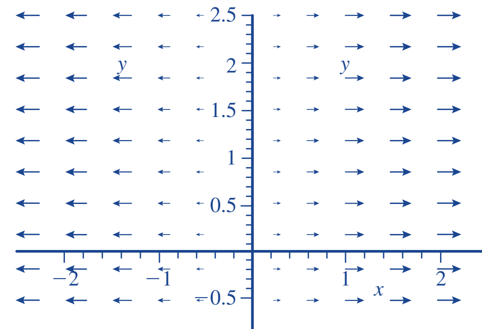


Figura 14.8

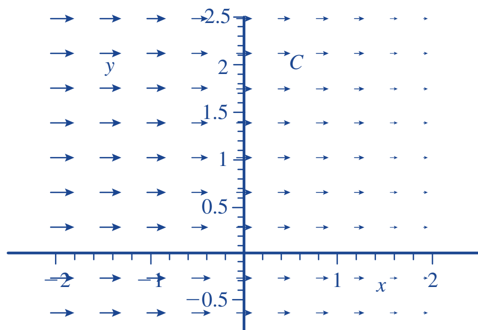


Figura 14.9

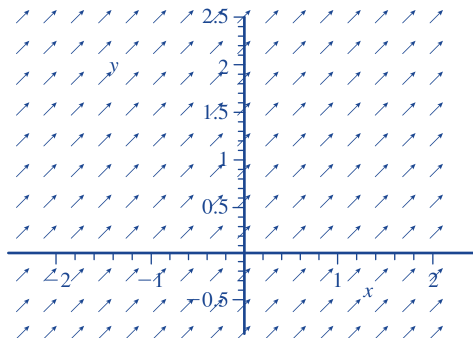


Figura 14.10

Ejercicio 14.62. Llene los espacios en blanco con: 0, $\vec{0}$, $\neq 0$, $\neq \vec{0}$.

1) El rotacional de $\vec{F}$ de la figura 14.7 es: R/

2) El rotacional de $\vec{F}$ de la figura 14.8 es: R/

3) El rotacional de $\vec{F}$ de la figura 14.9 es: R/

4) El rotacional de $\vec{F}$ de la figura 14.10 es: R/

5) La divergencia de $\vec{F}$ de la figura 14.7 es: R/

6) La divergencia de $\vec{F}$ de la figura 14.8 es: R/

7) La divergencia de $\vec{F}$ de la figura 14.9 es: R/

8) La divergencia de $\vec{F}$ de la figura 14.10 es: R/

Ejercicio 14.63. Calcular: $\oint_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, donde C es la frontera de la región entre los círculos $x^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Ejercicio 14.64. Sea $\vec{F}(x, y) = \dfrac{\vec{r}}{r}$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y $r = \|\vec{r}\|$. Considere la curva C como una curva cerrada formada por media circunferencia de radio 2 ($x^2 + y^2 = 4$, $x \leq 0$), y los segmentos que unen los puntos $(0, -2)$ con $(-1, 0)$ y $(-1, 0)$ con $(0, 2)$ orientada positivamente. Calcular

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario a C.

Ejercicio 14.65. Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas:

$$\vec{F}(x, y) = \left(-x^4 y, x^2\right)$$

para mover una partícula a lo largo del cuadrado, orientado positivamente, de vértices en los puntos (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1).

Ejercicio 14.66. Calcular el flujo del campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(e^y z + x^4, \quad \tan^{-1}(x) + y, \quad \operatorname{sen}(xy) + z\right)$$

a través del cubo unitario en el primer octante que tiene tres caras sobre los planos coordenados.

Ejercicio 14.67. Sea $\vec{F}(x, y, z) = xe^z\vec{i} + (x + xz)\vec{j} + 3e^z\vec{k}$ la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hallar

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

donde ∂S es el borde o frontera de S.

Ejercicio 14.68. Sea $\vec{F}(x, y, z) = e^x y\vec{i} + (e^x + 2y)\vec{j}$. Hallar el trabajo que realiza una fuerza al mover una partícula a lo largo de la línea poligonal desde el punto (0, 0) hasta el punto (1, 1) pasando por el punto (n, 0).

Ejercicio 14.69. Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^4 y, 2xz, 3yz\right)$$

y sea S la superficie correspondiente a la porción del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante con sus normales apuntando hacia "afuera" (hacia el primer octante). Calcular

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Ejercicio 14.70. Sea $\mathbf{F} = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + \left(x^2 ye^z + z^2\right)\mathbf{k}$.

1) Verificar que $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo. Explique.

2) Hallar una función f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Ejercicio 14.71. Conteste falso (F) o verdadero (V). Justifique.

1) El campo vectorial $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ es incompresible.

2) Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, y $\nabla \cdot \vec{G} = 0$, entonces $\nabla \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = 0$.

Ejercicio 14.72. Calcular la integral de superficie de $f(x, y, z) = x^4 y$, donde S es el tetraedro de lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$, y $x = y$.

Ejercicio 14.73. Calcular la integral de línea de

$$F(x, y) = (xy, y^2)$$

desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$ a lo largo de la curva $y = x^4$.

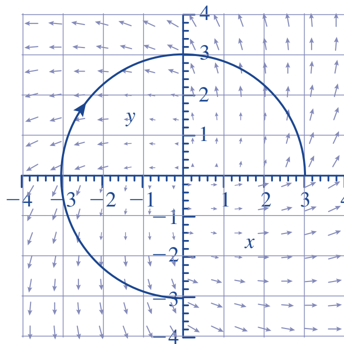


Figura 14.11

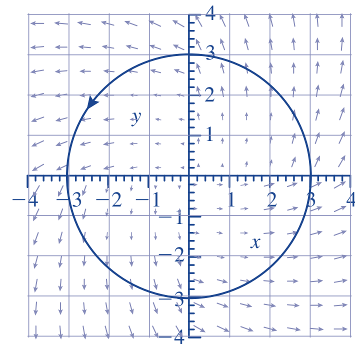


Figura 14.12

En la figura 14.11 se muestra un campo vectorial planar $\vec{F}$, que tiene divergencia y rotacional constante y una curva C_1. En la figura 14.12 se muestra el mismo campo vectorial $\vec{F}$ y otra curva C_2. Observe bien las orientaciones de las curvas.

Ejercicio 14.74. Llene los espacios en blanco y justifique.

1) ¿Es $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ positiva, negativa o cero? ______

2) ¿Es $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ positiva, negativa o cero? ______

3) ¿Es $\nabla \cdot \vec{F}(2, 2)$ positiva, negativa o cero? ______

4) ¿Es $\int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ positiva, negativa o cero? ($\vec{n}$ es el vector normal unitario exterior a C_2). ______

5) ¿Es $\iint_{D_2} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$ positiva, negativa o cero? (D_2 es la región acotada por C_2). ______

Ejercicio 14.75. Use el teorema de Green para evaluar:

$$\int_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy,$$

donde C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 3), orientado positivamente.

Ejercicio 14.76. Considere el campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

y la curva C, $x^2 + y^2 = 1$ $z = 0$, (circunferencia en el plano xy).
Calcule la integral de línea,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ejercicio 14.77. Considere el campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

y la bola sólida E, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, acotada por la esfera S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Calcule la integral de superficie, flujo hacia afuera,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Ejercicio 14.78. Considere el campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

y la superficie S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z \geq 0$, (hemisferio superior).
Calcule la integral de superficie, flujo hacia arriba,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Ejercicio 14.79. Considere el campo gravitacional, donde las constantes G, m_1 y m_2 están renormalizadas igualadas a la unidad, es decir el campo:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F}(x, y, z)$$
$$= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

1) Demuestre que es irrotacional.

2) Demuestre que este campo es conservativo y halle un potencial escalar f.

3) Demuestre que su divergencia es cero.

4) Halle el trabajo que realiza un cohete de la NASA, para ir desde la superficie de la tierra hasta el infinito. Si necesita datos como masa, velocidades de escape etc., debe usted mismo investigarlos.

5) Investigue todo lo relacionado con colocar un satélite geoestacionario. Si necesita datos como masa, velocidades de escape etc., debe usted mismo investigarlos.

Ejercicio 14.80. Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de la función

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

sobre el dominio rectangular $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$ y los puntos donde estos valores se alcanzan.

Ejercicio 14.81. Encuentre el volumen del sólido dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ arriba del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejercicio 14.82. Suponga que $f(x, y, z)$ es una función suave y que $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial suave en el espacio. Además $rot(\vec{F})$ es el rotacional $(\nabla \times \vec{F})$, $div(\vec{F})$ es la divergencia $(\nabla \cdot \vec{F})$, y $grad(f)$ es el gradiente (∇f).

Llene las casillas en blanco con las palabras: *escalar*, *vector* o *sin sentido* si la expresión tiene valor escalar, valor vectorial o no tiene sentido, respectivamente.

1) La derivada direccional de f en la dirección $(1, 1, 1)$ . . . . . . ☐

2) $rot(grad(f))$ . . . . ☐

3) $div(grad(\vec{F}))$ . . . . ☐

4) $grad(div(\vec{F}))$ . . . . ☐

5) $rot(rot\vec{F})$. . . . . ☐

Ejercicio 14.83. Decida cuál es la respuesta correcta a la pregunta: ¿cuál de los campos es conservativo?

$$\vec{F}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + y^2\vec{k}, \quad \vec{G}(x, y, z) = 2xyz\,\vec{i} + (x^2 + xyz)\vec{j} + xy^2\vec{k}$$

A. $\vec{F}$ es conservativo pero $\vec{G}$ no lo es.

B. $\vec{G}$ es conservativo pero $\vec{F}$ no lo es.

C. Ambos son conservativos.

D. Ninguno de los dos es conservativo.

Ejercicio 14.84. Calcule $\int_C 2xds$ donde C es la curva dada por $\{C: x = t, y = t^2, 0 \le t \le 2\}$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{17}-1}{6}$

C. $\frac{17\sqrt{17}-1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{15}-1}{12}$

E. $\frac{15\sqrt{15}-3}{6}$

F. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 14.85. Escoja la respuesta correcta. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial, el cual es el rotacional de un campo vectorial $\vec{G}_2$ entonces:

A. $\vec{F}$ es un campo vectorial constante;

B. $\vec{F}$ es el campo vectorial cero;

C. $\vec{F}$ tiene divergencia cero;

D. $\vec{F}$ es irrotacional.

Ejercicio 14.86. Considere la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

¿Cuál de las siguientes funciones resuelve la ecuación?

A. $u(x, t) = \cos(x - at)$

B. $u(x, t) = \cos(ax - t)$

C. $u(x, t) = \operatorname{sen} a(x - t)$

D. $u(x, t) = a \operatorname{sen}(x - t)$

E. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 14.87. Suponga que una partícula se mueve en el plano de modo que su velocidad tiene magnitud constante. Decida cuál es la respuesta correcta.

A. Su velocidad es perpendicular a su distancia al origen.

B. Su velocidad es cero.

C. Su velocidad es perpendicular a su aceleración.

D. Su aceleración es cero.

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 14.88. La ecuación $r = 2\cos\theta$ (en coordenadas polares) representa:

A. Una parábola que es convexa hacia arriba;

B. una parábola que es convexa hacia abajo;

C. Una circunferencia con centro al lado izquierdo del origen;

D. Una circunferencia con centro al lado derecho del origen;

E. Dos hojas de una rosa;

F. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 14.89.

1) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por las ecuaciones $x = u^3$, $y = u^2 - v^2$, $z = v$ en el punto $(1, 0, 1)$.

2) Considere la superficie S dada por $z = x^2 + 4y$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

   Calcule $\iint_S 2x\,dS$ sobre esta superficie.

3) Considere de nuevo la superficie dada en el ítem anterior con orientación hacia arriba. Encuentre el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2x\vec{j}$ a través de S.

Ejercicio 14.90. Use el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ con $\vec{F}(x, y, z) = e^{-x}\vec{i} + e^{y}\vec{j} + e^{z}\vec{k}$, donde C es la frontera del plano $2x + y + 2z = 2$ en el primer octante y orientado en sentido antihorario visto desde arriba.

Ejercicio 14.91. Use el teorema de la divergencia para evaluar el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^4)\vec{i} + x^3z^3\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k}$ a través de la superficie S, donde S es la frontera de la región E debajo del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y arriba del plano xy.

CAPÍTULO 15

Soluciones

15.1 Ejercicios del capítulo 1

1.1 $(0, 3, 5)$.

1.2 $\left(7\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}, 3\right)$.

1.3 $(4\sqrt{3}, \pi/4, 4)$.

1.4 $9r^2 + z^2 = 13$.

1.5 $\rho^2 (8 \operatorname{sen}^2 \phi - 4 \cos^2 \phi) = 18$.

1.6 $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 18$.

1.7 $z = 4r^2 \cos 2\theta$

1.8 A.

1.9 $0 \leq \rho \leq 6 \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \theta < 2\pi$.

1.10 $\pi/3$.

1.11 $P(-2, 3, 1)$.

1.12 $-10x + 2y - 5z = 0$.

1.13 $x + y + z = -6$.

1.14 $x + y - z = 3$.

1.16 $2\sqrt{\frac{934}{35}} \approx 10.33$.

1.17 $2x - 98y + 21z = -57$.

1.19 $\frac{2}{13}\sqrt{13} \approx 0.55$.

1.20 $x + 6y + 11z = 33.$

1.21 $3x + 3y - z = 0.$

1.22 $17/7 \approx 2.43.$

1.23 $P(49, -3, 32).$

1.24 $(-10\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}) + t(2\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}).$

1.25 C.

1.26 $(9\vec{i} + 6\vec{k}) + t(-3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}).$

1.27 $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{2} = 1.$

1.28 $(6\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}) + t(8\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}).$

1.29 $x = 5t + 8,\ y = -3t + 1,\ z = -2t + 10.$

1.30 A.

1.31 $\begin{cases} x = k,\ z^2 - y^2 = 1 - k^2, \text{ hipérbolas,} \\ y = k,\ x^2 + z^2 = 1 + k^2, \text{ circunferencias,} \\ z = k,\ x^2 - y^2 = 1 - k^2, \text{ hipérbolas.} \end{cases}$

1.32 Hiperboloide de un solo manto con eje, el eje z.

1.33 $16x^2 = y^2 + z^2.$

1.34 D.

1.35 B.

1.36 B.

1.37 B.

1.38 $y = x^2 + z^2.$

1.39 $x^2 + y^2 = \frac{1}{25}z^2.$

1.40 $z^2 + x^2 = -20y.$

15.2 Ejercicios del capítulo 2

2.1 1) $\{t|t \neq 0\} \cap \{t|t \geq 1\} = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

2) $\{t|t \neq 0\} \cap \{t|t \geq 1\} = (-\infty, -2,) \cup (-2, -1) \cup (1, \infty)$.

3) No existe intersección entre los dominios de las componentes, por lo tanto el dominio es el conjunto vacío.

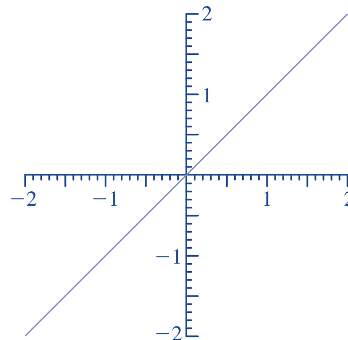
4) $4 \leq t \leq 10$.

2.2 1) $\left(\frac{1}{t} - 2\sqrt[3]{t+1},\ t - 2\cos t\right)$;

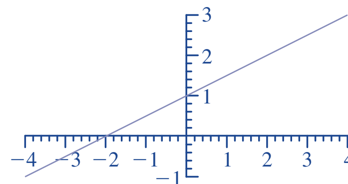
2) $\dfrac{\cos t}{t} - t\sqrt[3]{t+1}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{t+1}}{t} + t\cos t$.

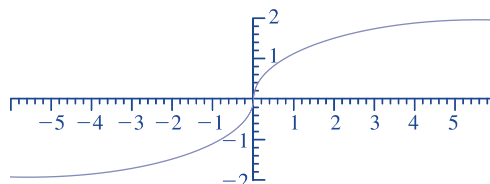
2.3 1)



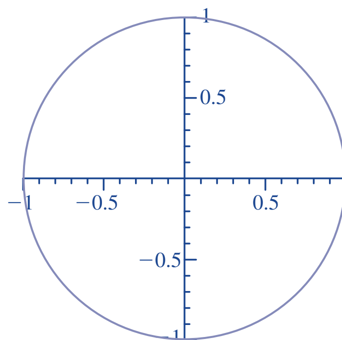
2)



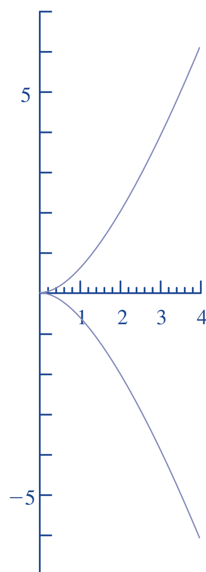
3)



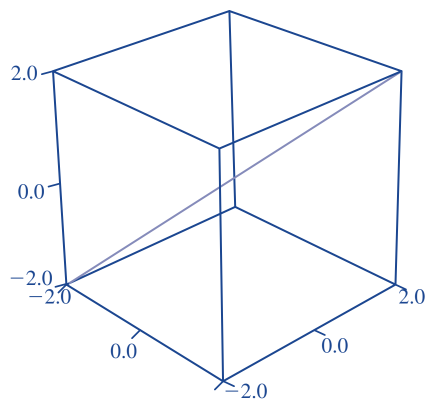
4)



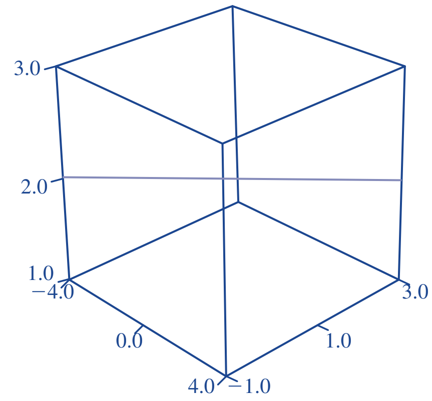
5)



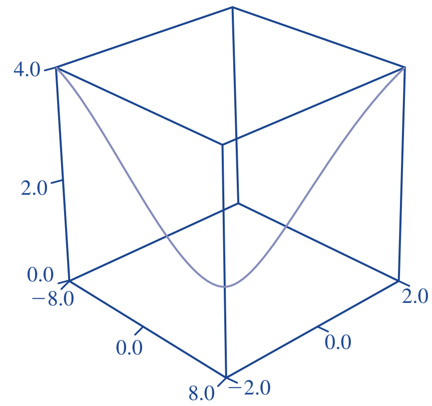
2.4 1)



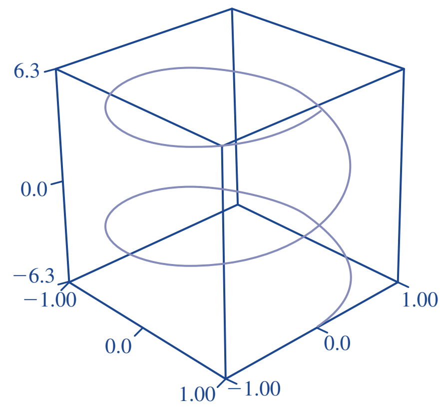
2)


3.0
2.0
1.0
−4.0
0.0
4.0
−1.0
1.0
3.0

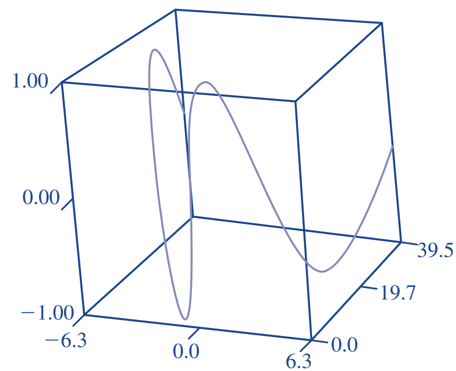
3)


4.0
2.0
0.0
−8.0
0.0
8.0
−2.0
0.0
2.0

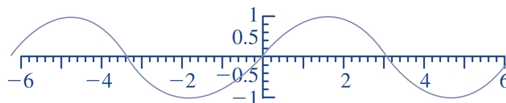
4)


6.3
0.0
−6.3
−1.00
0.0
1.00
−1.00
0.0
1.00

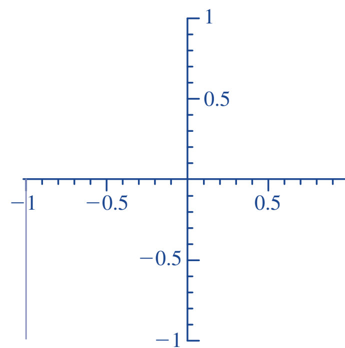
5)



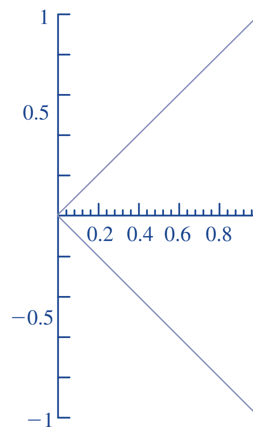
2.5 1) $D = \mathbb{R}$,



2) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$



3) $D = \mathbb{R}$,



2.6 1) $(0, 2, -\text{sen}\, t)$,

2) $\left(\dfrac{-1}{(t^2-1)^{3/2}}, -\dfrac{1}{t}\right)$.

2.7 1) Aplique la definición y luego use el hecho de que cada componente es una función real de variable real.

2) $\left(-\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{3}(t+1)^{-2/3}\right)\vec{i} + (1 + 2\,\text{sen}\, t)\vec{j}$;

3) $\left(-\dfrac{1}{t^2} - \sqrt[3]{t+1} - \dfrac{1}{3}(t+1)^{-2/3}\right)\vec{i} + (1 - \cos t + t\,\text{sen}\, t)\vec{j}$;

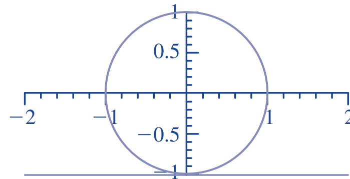
4) $\left(-\dfrac{2}{t^3} + 3t^2\sqrt[3]{t+1} + \dfrac{t^3}{3}(t+1)^{-2/3}\right)\vec{i} + \left(2t + 3t^2\cos t - t^3\,\text{sen}\, t\right)\vec{j}$.

2.8 1) $\left(2\sqrt{t+1}; -\cos t\right)$.

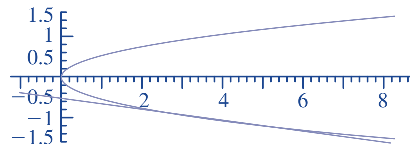
2) $(e^3 - 1)\vec{i} + \dfrac{1}{2}(1 - e^9)\vec{j}$.

2.9 1) C, 2) A.

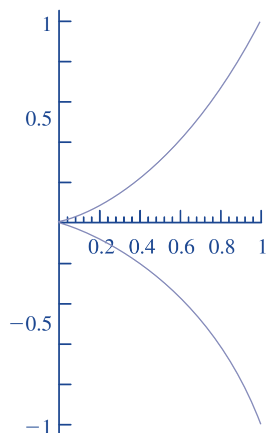
2.10 1) $(2s, -1)$,



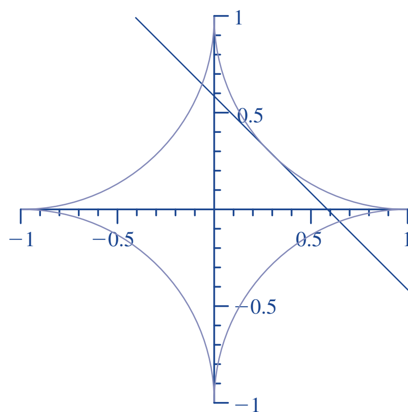
2) $(4 - 8s, s - 1)$,



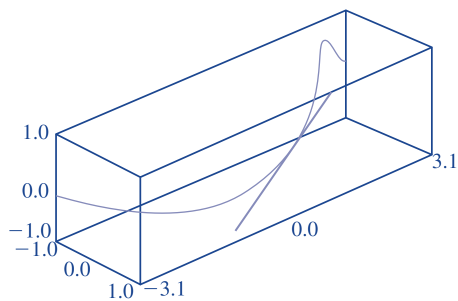
3) No existe la recta tangente (v. la gráfica),



4) $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}s, \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}s\right)$,



5) $(1, s, s)$,



2.11 1) $x + 6y + 27z = 786$;

2) $x - y - z = -1$.

2.12 $(-1, -3, 1)$.

2.13 1) $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + 2\,\mathrm{sen}2\,t\,\vec{k}$;

2) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \dfrac{t^2 - 121}{22}\vec{j} + \dfrac{t^2 + 121}{22}\vec{k}$;

3) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + (9t^2 + t^4)\,\vec{k}$;

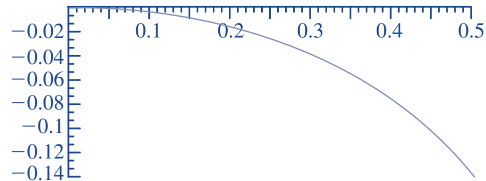
4) $\vec{r}(t) = (5\cos t, 5\,\mathrm{sen}\,t, 25\cos^2 t)$.

2.14 1) $\left(\dfrac{2t^2}{2t^2+1}, \dfrac{2t}{2t^2+1}, \dfrac{1}{2t^2+1}\right)$;

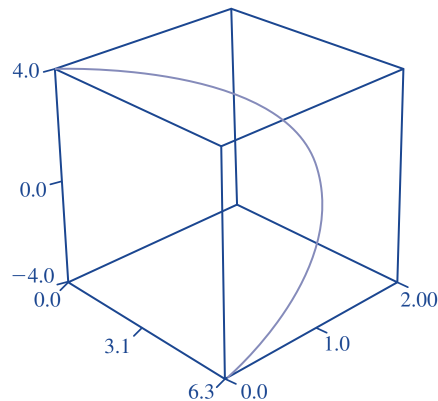
2) $\left(\dfrac{t^2}{t^2+2}, \dfrac{2t}{t^2+2}, \dfrac{2}{t^2+2}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}\cos t, \dfrac{4}{\sqrt{17}}, -\dfrac{1}{\sqrt{17}}\,\mathrm{sen}\,t\right)$.

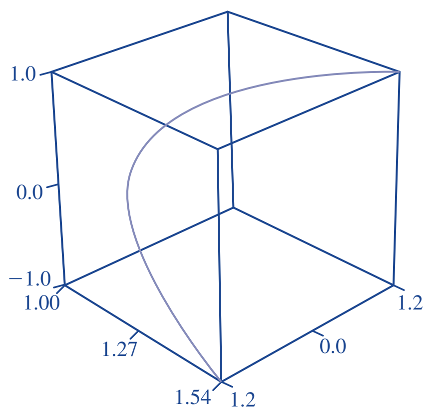
2.15 1) $\dfrac{1}{2}(\ln 3)$,



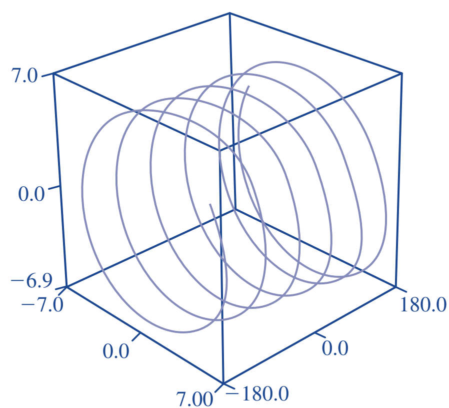
2) $8a\sqrt{2}$,



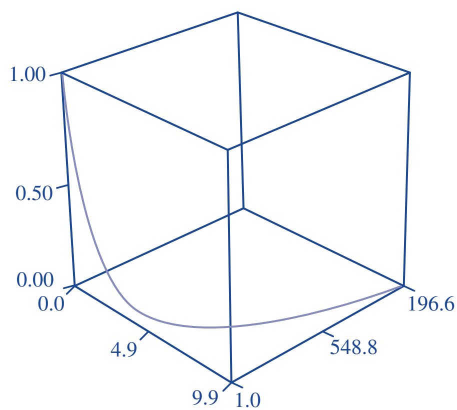
3) $\sqrt{2}(e - 1/e)$,



4) $36\sqrt{149}$,



5) $e^7 - e^{-7}$,

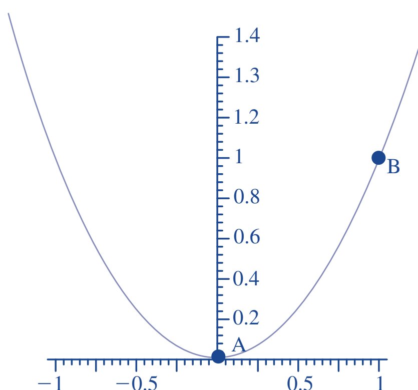


2.16 1) $\vec{r}(t(s)) = 3\,\mathrm{sen}\,\dfrac{s}{\sqrt{10}}\,\vec{i} + \dfrac{s}{\sqrt{10}}\vec{j} + 3\cos\dfrac{s}{\sqrt{10}}\,\vec{k}.$

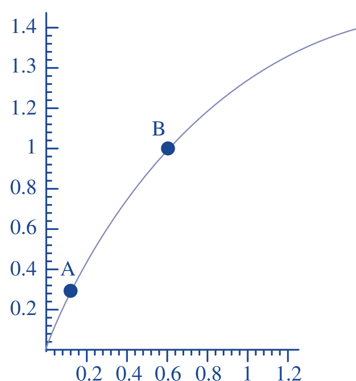
2) $\vec{r}(t(s)) = (2 + \dfrac{s}{\sqrt{2}})\,\mathrm{sen}(\ln(1 + \dfrac{s}{2\sqrt{2}}))\,\vec{i} + (2 + \dfrac{s}{\sqrt{2}})\cos(\ln(1 + \dfrac{s}{2\sqrt{2}}))\,\vec{j}.$

3) $\vec{r}(t(s)) = (4 + \dfrac{s}{\sqrt{14}})\,\vec{i} + (10 + \dfrac{2s}{\sqrt{14}})\,\vec{j} - \dfrac{3s}{\sqrt{14}}\,\vec{k}.$

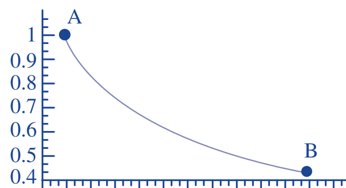
2.17 1) $\kappa(A) = 2, \kappa(B) = \dfrac{2}{5\sqrt{5}},$



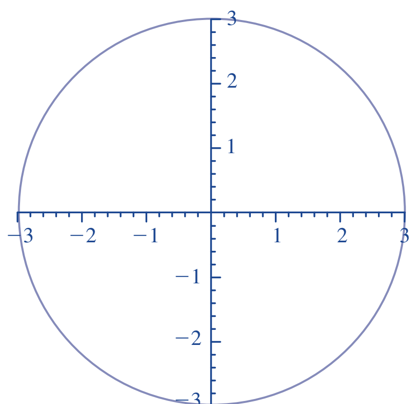
2) $\kappa(A) = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \kappa(B) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}},$

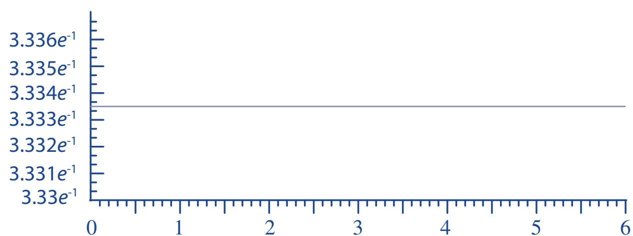


3) $\kappa(A) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\kappa(B) = \dfrac{2e^3}{(1+e^4)^{3/2}}$,

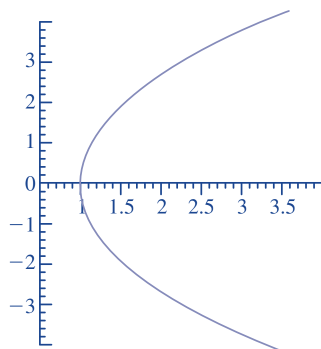


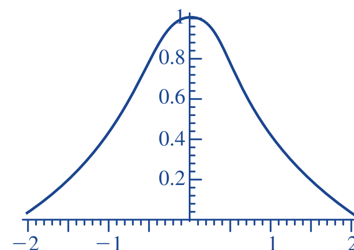
2.18 1) $\kappa(t) = 1/3$,



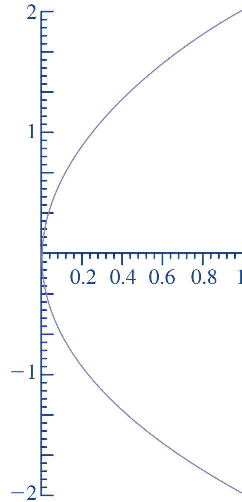


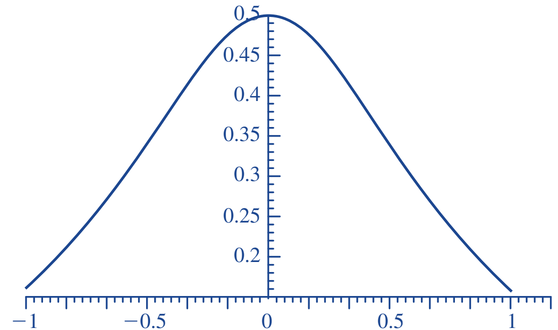
2) $\kappa(t) = \dfrac{1}{(2\cosh(t)^2 - 1)^{3/2}}$,





3) $\kappa(t) = \dfrac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}$,





2.19 $-\dfrac{1}{2}\ln 2 - \ln 3$.

2.23 1) $|\, v\,(t)\,| = \sqrt{1 + 64t^2 + 1764t^{12}}$;

2) $|\, v\,(t)\,| = \sqrt{1 + 36t^2 + 400t^6}$;

3) $|\, v\,(t)\,| = 3\,(e^{3t} + e^{-3t})$.

2.24 $t = 2$.

2.25 $\vec{v}(t) = 22e^{11t}\,\vec{i} - 220e^{-11t}\,\vec{j}$.

2.26 1) $\vec{a}(t) = (\,12, 0, 0)$;

2) $\vec{a}(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{k}$.

2.27 $\vec{v}(t) = 10\,\vec{i} + 6\vec{j} + 8t\,\vec{k}$.

2.28 1) $\vec{r}(t) = (t+8)\,\vec{i} + (t+4)\vec{j} - (5t^2 + 7t)\,\vec{k}$.

2) $\vec{r}(t) = (7t^2 + 20)\,\vec{i} + (9t^2 + 6)\,\vec{j} + 4t^3\,\vec{k}$.

2.29 $a_T = 24t$.

2.30 $a_N = 8$.

2.31 $\vec{F}(t) = m\,(30t\,\vec{i} + 14\vec{j} + 24t\,\vec{k})$.

2.32 $v_0 \approx 43.8$ m/s.

2.33 $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} - 7t\,\vec{j} + 8t^2\,\vec{k}$.

2.34 $d \approx 66$ km.

15.3 Ejercicios del capítulo 3

3.1 1) $\{(x, y) | y > -1 - x^2\}$.

2) El interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 17$.

3) El interior de la elipse $7x^2 + y^2 = 1$.

4) $\{(x, y) \mid y > 1 - x, x \neq -7y\}$.

5) $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + 2y^2 - 1 < 8\}$.

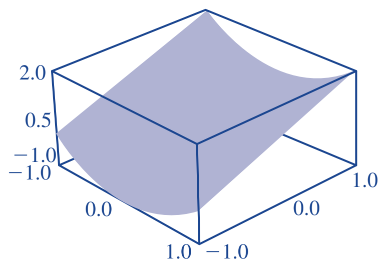
6) $\{(x, y) \mid -y < x \leq y, y > 0\}$,

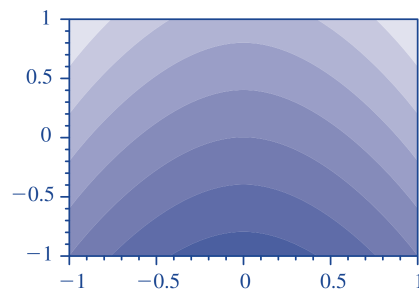
7) El interior del elipsoide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{8} = 1$.

3.2 1) $(0, \infty)$,

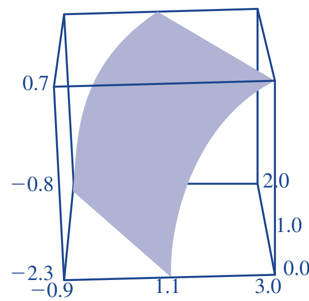
2) $(-\infty, \ln 9)$.

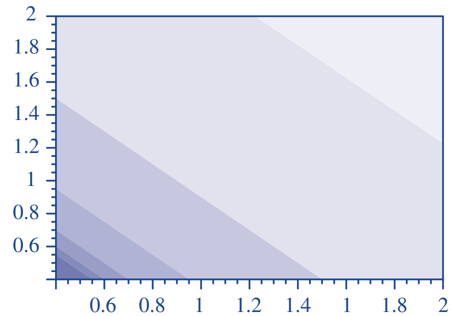
3.3 1) $\mathbb{R}^2$,



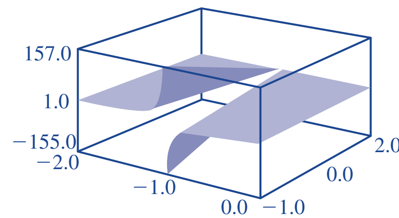


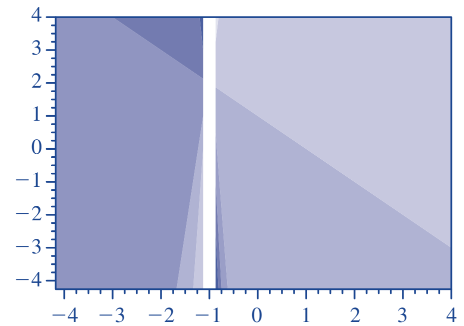
2) $\{(x, y) \mid x + y > 1\}$,





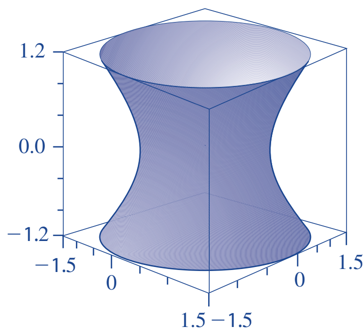
3) $\{(x, y) \mid x \neq 1\}$,



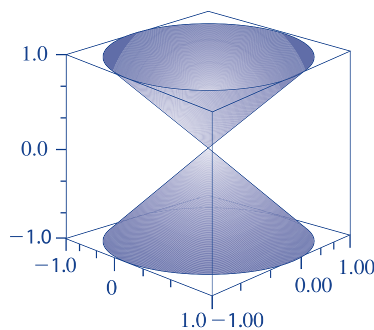


3.4 1) El dominio es $\mathbb{R}^3$. La superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ existe para $c \leq 1$ y es la esfera con el centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{c-1}$; para $c = 1$ la superficie es el punto $(0, 0, 0)$.

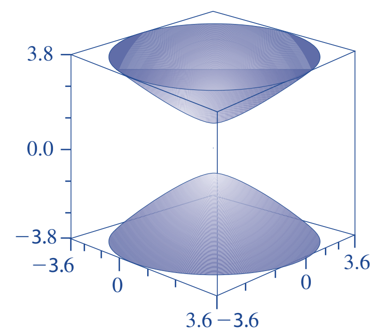
2) El dominio es $\mathbb{R}^3$. La superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ existe para todos $c \in \mathbb{R}$:



$c > 0$



$c = 0$



$c < 0$

3) El dominio es $\{(x, y, z) \mid x + y + z \geq 0\}$. Las superficies de nivel son los planos $x + y + z = c^2$.

4) El dominio es $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. La superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ existe para cada $c \in \mathbb{R}$ y es la esfera con el centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{e^c + 1}$.

3.5 1) $f_x(x, y) = 2x - y, f_y(x, y) = 6y - x$;

2) $f_x(x, y) = 8x - 3y, f_y(x, y) = -3x + 10y$.

3.6 1) $f(1, 2) = -10, f(2, -3) = -19$.

2) $f_x(1, 2) \approx 4$,

3) $f_y(1, 2) \approx -12$,

4) $f_{xy}(1, 2) \approx 0$.

3.7 1) $f(1, 2) \approx -3, 2; f(2, 1) \approx 2, 3$.

2) $f_x(2, 1) \approx 4, 12$.

3) $f_y(1, 2) \approx -0, 56$.

3.8 1) Cero.

2) Negativa.

3) Negativa.

4) Negativa.

3.9 1) $f_x = 2(x - x^3)e^{-x^2-y^3}, \; f_y = -3x^2y^2e^{-x^2-y^3}$;

2) $f_x = 4x^3 + 4x^3y, f_y = 4y^3 + x^4$,

3) $f_x = 40x^4 + 18x^2y^2 + 3y^4, f_y = 12xy(x^2 + y^2)$;

4) $f_x = \cos x^6, f_y = -\cos y^6$.

3.10 1) $f_a = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, f_b = \dfrac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2}$

2) $u_{x_i} = -i \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n), \; i = 1 \cdots n$.

3.11 $u_t = -9xe^{-9t} \operatorname{sen} \theta$.

3.12 10.

3.13 C.

3.14 1) $f_x(1, 1) = 4$;

2) $f_x(-2, 1) = -8$;

3) $f_y(4, -2) = 12$,

4) $f_{xx}(1, 1) = 4$;

5) $f_{yy}(0, 0) = -6$;

6) $f_{xy}(0, 0) = 0$.

3.15 1) $f(1, 1) = 0$; $f_x(1, 2) = -\operatorname{sen} 1 \approx -0,84$, $f_y(-1, 2) = \operatorname{sen} 4 \approx -0,757$, $f_{xy}(0, 0) = 0$.

2) $f(0, 0) = 0$; $f_x(0, 2) = 1$; $f_y(-1, 0) = 0$; $f_{xy}(0, 0) = 0$.

3) $f_x = \dfrac{z^{x/y} \ln z}{y}$; $f_y = -\dfrac{x(z^{x/y}) \ln z}{y^2}$; $f_z = \dfrac{xz^{x/y\ -1}}{y}$.

3.16 $f_{xx} = 12x^2 - 14y^3, f_{xy} = -42xy^2, f_{yx} = -42xy^2, f_{yy} = -42x^2y$.

3.17 $32y\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^3 4x}$.

3.18 $f_{xxx} = -48xy$.

3.19 $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2\, \partial z^3} = ab(b-1)c(c-1)(c-2)x^{a-1}y^{b-2}z^{c-3}$.

3.20 1) Verdadero.

2) Verdadero.

3.21 1) $2x + 2y - z = 2$.

2) $3x + 4y - 5z = 0$.

3) $x + 2y + z = 2$.

4) $z = -4x - 6y + 35$.

3.22 1) $\begin{cases} x(t) = 1 + 2t, \\ y(t) = 1 + 2t, \\ z(t) = 2 - t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = 3 + \frac{3}{5}t, \\ y(t) = 4 + \frac{4}{5}t, \\ z(t) = 5 - t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - t, \\ y(t) = \frac{1}{2} - 2t, \\ z(t) = \frac{1}{2} - t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(t) = 4 - 4t, \\ y(t) = 3 - 6t, \\ z(t) = 1 - t. \end{cases}$

3.23 Dirección de x: $-\dfrac{100}{9}$,

direccion de y: $-\dfrac{50}{9}$.

3.24 $\dfrac{\partial R}{\partial R_3} = \dfrac{R^2}{R_3^2}$.

15.4 Ejercicios del capítulo 4

4.1 $u_r = f_x x_r + f_y y_r$, $u_s = f_x x_s + f_z z_s$, $u_{sr} = f_{xx} x_r x_s f_{xz} z_s x_r + f_x x_{rs} + f_{yz} y_r z_s$, $u_{rr} = f_{xx}(x_r)^2 + f_x x_{rr} + 2 f_{xy} x_r y_r + f_y y_{rr}$, $u_{ss} = f_{xx}(x_s)^2 + f_x x_{ss} + 2 f_{xz} x_s z_s + f_z z_{ss}$.

4.2 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial w}\Big|_{u=1,\, v=1, w=0} = -8$.

4.3 $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r \left(6\, t \cos\theta - \dfrac{s \operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)$.

4.4 $\dfrac{dz}{dt} = 77$

4.5 1) 20,

2) 1032,

3) 432.

4.6 1) $\dfrac{dz}{dt} = 2\cos x \cos y - \dfrac{5 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{2\sqrt{t}}$;

2) $\dfrac{dz}{dt} = \ln(x + 10y)\cos t + \dfrac{x\cos t - 10x \operatorname{sen} t}{x + 10y}$;

3) $\dfrac{dw}{dt} = e^{\frac{y}{z}}(2t - \dfrac{x}{z} - \dfrac{9xy}{z^2})$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 10x + 50y + 2yt + 10xt$;

5) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{3ye^{2t} - x}{y^2 e^t}$;

6) $\dfrac{1}{y + z}\left(1 - \dfrac{2x + y - z}{y + z}\right)$.

4.7 $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen}\,\theta$

4.8 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

4.9 Sea $F = xyz - \ln(x + y^2 - 2z)$, entonces $F(3, 0, 1) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z}|_{P(3,0,1)} = 2 \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe una función $z = f(x, y)$ definida en una vecindad de P. Luego, $f_x(3, 0) = 1/2$, $f_y(3, 0) = -3/2$, $f_{xy}(3, 0) = -5/4$.

4.10 Sea $F = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, entonces $F(1, 1, 1) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{z}|_{P(1,1,1)} = -2 \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe una función $z = f(x, y)$ definida en una vecindad de P. Luego, $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 1$, $f_{xx}(1, 1) = f_{yy}(1, 1) = 0$ y $f_{xy}(1, 1) = -1$.

4.11 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen}(x - 3y) + e^{2y}}{3\operatorname{sen}(x - 3y) - 2xe^{2y}}$

4.12 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{6xe^{6y} + 7z}{7y + e^{4x}}$.

4.13 1) -4,

2) $\sqrt{3}/2$;

3) $-\tan(1)/\sqrt{3}$.

4.14 1) 18.

2) $\dfrac{3\sqrt{3}+2}{16}$.

4.15 122/13.

4.16 1) $\nabla f(x, y) = (2y^5 - 40x^3y, 10xy^4 - 10x^4)$,

2) $\nabla f(x, y) = (\cos x \cos y - 1, -\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y + 1, -2)$.

4.17 1) (2, 7),

2) (−4, 4, 12).

4.18 1) (1, 0),

2) (−2, 3, −4).

4.19 1) (7, −3),

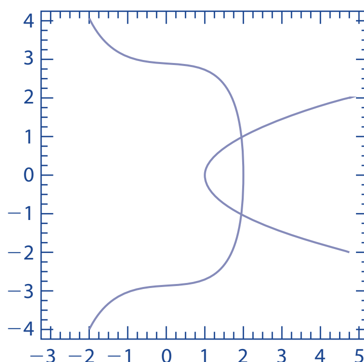
2) (6, 4, −1).

4.20 $3x + 24y = 105$.

4.21 $x = 6 + 24t$, $y = 2 + 28t$, $z = 9 + 126t$.

4.22 $x + 7y - z = 7$.

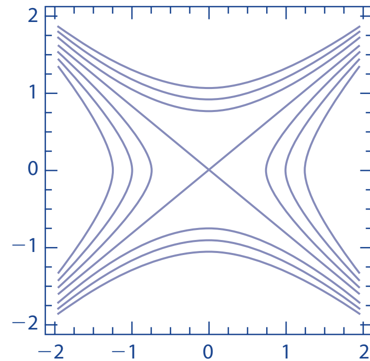
4.23 1)



2) $\arccos(4/\sqrt{185}) \approx 65°$

4.24 $x = -1 - 22t$, $y = 2 - 13t$, $z = 5 - 8t$.

4.25 1)



2) 6, crece.

3) $2 - 3\sqrt{3}$, decrece

4) (3, 2).

5) $2x - 3y + 1 = 0$.

6) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 3t$.

7) (2, −3).

8) (−2, 3).

4.26 1)

2) $-\sqrt{3}$, decrece

3) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, crece

4) En la dirección del vector $\vec{u} = (1, 0, 2)$.

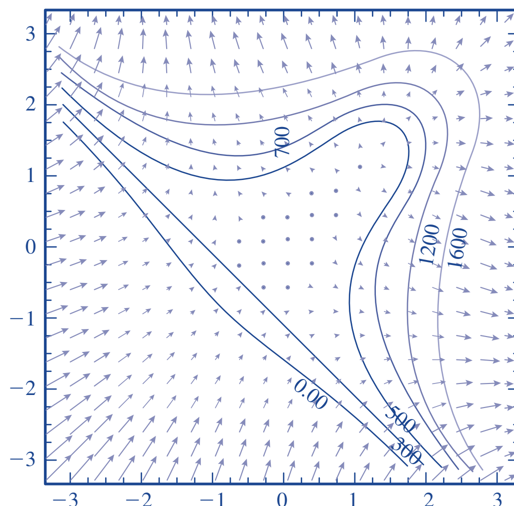
5) $2x + 2y - z - 2 = 0$.

6) $x = 1 - 2t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2 + t$.

7) En la dirección del vector $\vec{u} = (-2, -2, 1)$.

8) En la dirección del vector $\vec{u} = (2, 2, -1)$.

4.27



4.29 1) El río nace cerca del cerro Pan de Azúcar en la altura de 3200 metros sobre el nivel del mar y desemboca en la represa del río Calima.

2) Entre 3200 metros y 1500 metros.

3) No hay.

4) $1/8$.

4.30 $-0{,}11$ L/s.

4.31 $1{,}5$°C/s.

4.32 $2{,}769{,}84$ in^3/s.

4.33 172 m^2/s.

4.34 $-53{,}74$.

4.35 $-\dfrac{40}{\sqrt{77}}$.

15.5 Ejercicios del capítulo 5

5.1 1) $(4, 0)$, $(-6, 0)$, $(2, 0)$.

2) $(-6, 6)$, $(-8, 8)$, $(14, -14)$.

5.2 1) $(2, 1)$; mínimo local; $f(2, 1) = 6$.

2) $(0, 1)$; máximo local; $f(0, 1) = 2$.

3) $(0, 0)$; mínimo local; $f(0, 0) = 5$.

4) $(2, -1)$; silla; $f(0, 0) = 2$.

5) $\{(x, y)|x + 2y + 1 = 0\}$; mínimo; $f(-2y - 1, y) = 2$.

6) $(0, 0)$; máximo; $f(0, 0) = 1$.

7) $(0, 0)$; silla; $f(0, 0) = 1$.

8) $(0, 0)$; mínimo local; $f(0, 0) = 0$. $(0, \pm 1)$; silla; $f(0, \pm 1) = e^{-1}$.

9) $(0, 0)$; mínimo local; $f(0, 0) = 5$.

10) $(0, 0)$; máximo local; $f(0, 0) = \ln 4$.

5.3 f tiene un mínimo local en $(1, 1)$.

5.4 1) $(-1, 2)$,

2) $\left(\dfrac{\pi}{21}, \dfrac{\pi}{21}\right)$.

5.5 1) $(0, 0)$,

2) $(0, 0)$,

3) $(0, 4)$.

5.6 $(0, 5\pi n)$.

5.7 $(\pm 1, \pm 1)$, mínimo local, $f(\pm 1, \pm 1) = -3$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, silla, $f(\pm 1, 0) = -1$, $f(0, \pm 1) = -2$, $(0, 0)$, máximo local, $f(0, 0) = 0$.

5.8 Mínimo local $f(0, 0) = 16$.

5.9 1) $f_{\text{máx}} = f(2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 0) = 8$.

2) $f(6, 5, 7) = 220$.

3) $f_{\text{máx}} = f(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0) = f(0, \pm 1/\sqrt{2}, 0) f(0, 0, \pm 1/\sqrt{2}) = 0{,}5$.

4) $f_{\text{máx}} = f(7 - 12/\sqrt{17}, 16/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17}) = 7 + 4\sqrt{17} \approx 23{,}5$.

5.10 $f_{\text{mín}} = f(\sqrt{5}/2), \sqrt{5}/2), \sqrt{5}/2), \sqrt{5}/2)) = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36$.

5.11 1) $f_{\text{mín}} = -\dfrac{\sqrt{673}}{2} \approx -12{,}97$, $f_{\text{máx}} = \dfrac{\sqrt{673}}{2} \approx 12{,}97$.

5.12 Máximo = 4, mínimo = −4.

5.13 $f_{\text{mín}} = \dfrac{1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

5.14 $f = c/n = 5$.

5.15 En (0, 0) hay un punto de silla. Máximo local $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$, mínimo local $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/2$.

5.16 $f_{\text{máx}} = f(1, 1) = f(-1, 1) = 20$.

5.17 $f_{\text{mín}} = f(-2, 4) = -62$.

5.18 $1/\sqrt{3}$.

5.19 Distancia mínima es $\sqrt{45}/8 \approx 0{,}84$ entre los puntos $A(-11/16, 5/8)$ en la recta y $B(1/16, 1/4)$ en la parábola.

5.20 $D = \sqrt{190} \approx 13{,}784$.

5.21 Los puntos son (0, 0, 4), (0, 0, −4) y la distancia es 4.

5.22 1) 89, 89, 89.

2) 110, 110, 110.

5.23 El radio de la base del cono es $\sqrt{2}a/3$, la altura es $h = 4a/3$, y el volumen es $32a^3/81$.

5.24 Todos las aristas son 3.

5.25 26, 26, 13.

5.26 1) $x = y = z = 4$ cm,

2) $x = y = z = 6$ cm.

5.27 $x = y = z = 9$.

5.28 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5.29 $L = 110$, $K = 1{,}320$.

15.6 Ejercicios del capítulo 6

6.1 390.

6.2 1) 180.

2) 352.

3) 312.

6.3 $12\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 2\sqrt{103} + 2\sqrt{113} \approx 81{,}94$.

6.4 −700.

6.5 −720.

6.6 1664.

6.7 36.

6.8 54.

6.9 6700 ft^3.

6.10 1) $I_a = 2e^{\left(-\frac{17}{2}\right)} + 2e^{\left(-\frac{13}{2}\right)} + 2e^{\left(-\frac{9}{2}\right)} + 6e^{\left(-\frac{5}{2}\right)} + 4e^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \approx 2{,}944$.

2) $f_{\text{mín}} = \exp(-13) \approx 0{,}00000226$, $f_{\text{máx}} = 1$. Es verdad que, $0{,}000036 < 2{,}944 < 16$.

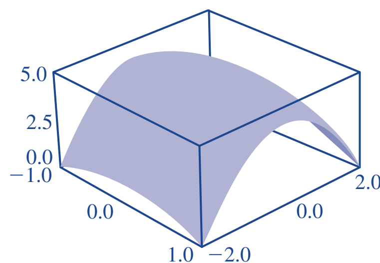
6.11 1) $I_a = 16$.

2) $I_e = 16$.

3) $0 < I_e < 64$.

4) 2.

6.12 1)



2) $V_a = 28$.

3) c) $V_e = 80/3$.

6.13 1) $24x + 24x^2$.

2) $26y + 24$.

6.14 1) 7,75.

2) $124/15 - 12\sqrt{3}/5 \approx 4{,}11$.

3) $7 \ln(4/3) \approx 2{,}01$.

4) 3.

6.15 1) 2.

2) $5{,}25\pi$.

3) $\sqrt{3} - 3/2 + \pi(1-\sqrt{3})/12 \approx 0{,}04$.

4) $8 \ln(2)/3 \approx 1{,}85$.

5) $-382{,}93$.

6) $1/2 \cdot \arctan(1/2)$.

7) 0.

8) 9.

6.16 1) 10,5.

2) 400;

3) $95/27$;

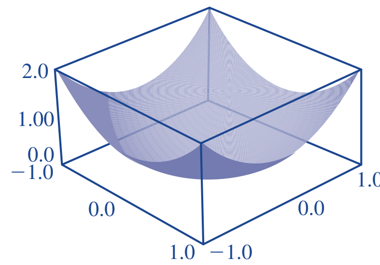
4) $4(6\sqrt{6} - 3\sqrt{3})/45 \approx 0{,}8445$;

5) $412/3$;

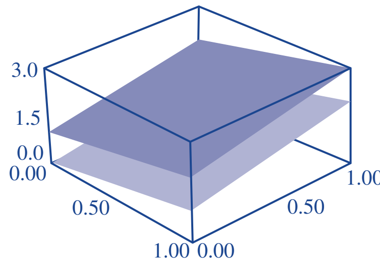
6) 36;

7) 336.

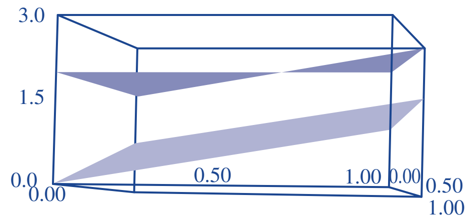
6.17 El volumen es $8/3$.



6.18 El volumen es 1.



6.19 El volumen es $5/4$.



6.20 1) 6,

2) $55/2$.

6.21 $e^2 - 2e^4 + e^6 \approx 301{,}6215$.

6.22 Si la temperatura es $T(x, y) = k(x^2 + y^2)$ entonces la temperatura media es $70k/3$. La temperatura $T(x, y)$ es igual a la temperatura media en los puntos del arco de intersección de la circunferencia con radio $\sqrt{70k/3}$ y el centro en el origen y el rectángulo.

15.7 Ejercicios del capítulo 7

7.1 1) $0 \leq I \leq 2\sqrt{5}$;

2) $\pi \leq I \leq \pi e^4$;

3) $0 \leq I \leq \sqrt{2}/6$;

4) $2e^{4-\pi^2} \leq I \leq 2e^4$.

7.2 $\left(0, \dfrac{45}{14\pi}\right)$.

7.3 $\dfrac{356}{105}$.

7.4 1) La región D es el triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

2) $\dfrac{1}{3}$.

3) La región R es el triángulo con vértices en $A'(0, 0)$, $B'(1, -2)$, $C'(1, 1)$.

4) $\int_0^1 \int_{-2u}^{u} v^2\sqrt{u}\, dv du = \dfrac{2}{9}$.

7.5 D es el triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2/3, 2/3)$. $u = y - x$, $v = x + 2y$. R es el triángulo con vértices en $A'(0, 0)$, $B(-2, 2)$, C' $(0, 2)$. $\int_{-2}^{0} \int_{-u}^{2} \mathsf{v} e^u \,(1/3)\, d\mathsf{v} du = 1 - e/2 \approx -0{,}36$.

7.6 1) D es el triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$.

2) $\int_0^1 \int_0^x e^{y/x}\, dy dx = (e - 1)/2 \approx 0{,}86$.

7.7 $\dfrac{3}{64}\pi^2$.

7.8 $V = \iint_D \left(\sqrt{1 - y^2 - z^2} - \sqrt{y^2 + z^2}\right) dz dy$ donde D es un cuarto de disco de radio $a = \sqrt{2}/2$. Usamos cambio de variables $y = r\cos\theta$, $z = r \operatorname{sen}\theta$. El jacobiano es r. El volumen es $(\pi/6)[1 - (1/\sqrt{2})] \approx 0{,}15$.

7.9 π.

7.10 $\int_0^2 \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} dx dy$. Representa el área de la región de integración D que es la unión de un triángulo con un cuarto de círculo. Su valor es $2 + \pi$.

7.11 1) 72.

2) $4(e-1) \approx 6{,}87$.

3) $\dfrac{1}{20}$.

4) $\dfrac{3}{4}\ln 37 \approx 2{,}71$.

5) $\dfrac{1-\cos 64}{2} \approx 0{,}3$.

6) $\dfrac{34}{3}$.

7) 0.

7.12 1) $\dfrac{1}{9}$;

2) 350;

3) $\dfrac{200}{3}$;

4) $\dfrac{9}{2}$;

5) $5000\pi \approx 15\,708$;

6) $\dfrac{20}{3}\pi\sqrt{5} \approx 46{,}83$;

7) $\dfrac{256\pi}{3} \approx 268$;

8) $\dfrac{9\pi}{2} \approx 14{,}14$;

9) $\dfrac{64\pi}{3}(2-\sqrt{2}) \approx 39{,}26$;

10) $\dfrac{772\pi}{3} \approx 808{,}4365$.

7.13 1) $\dfrac{e^{16}-1}{8} \approx 1{,}11 \cdot 10^6$.

2) $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 81 \approx -0{,}16$.

3) $\sqrt{3} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}79$.

7.14 1) $243\pi/16 \approx 47{,}71$.

2) $3471/16$.

3) $333\pi \approx 1046{,}15$.

4) $\dfrac{(1-e^{-16})\pi}{2} \approx 1{,}57$.

5) $\dfrac{(e^{16}-1)\pi}{4} \approx 7 \cdot 10^6$.

6) $\dfrac{1024\pi}{5} \approx 643{,}4$.

7.15 $500\pi \approx 1570{,}8$ ft^3.

7.16 $32\pi\sqrt{3} \approx 174{,}125$.

7.17 $\dfrac{128\pi}{3} \approx 134{,}04$.

15.8 Ejercicios del capítulo 8

8.1 1) $4a^2$,

2) $8a^2 \operatorname{arcsen} \frac{b}{a}$;

3) $\dfrac{\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$;

4) $8a^2$;

5) 5π;

6) $\frac{\pi}{6}\left(145\sqrt{145}-1\right);$

7) $36\sqrt{59};$

8) $16\sqrt{69}\pi;$

9) $\frac{3}{2}\sqrt{161};$

10) $56\,\operatorname{arcsen}\left(\frac{6}{7}\right);$

11) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right);$

12) $\frac{2\pi}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right);$

13) $6\pi.$

8.2 $4e^{-1}(e^2-1).$

8.3 $\sqrt{1+m_x^2+m_y^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$, para $m\in\{f,g,h\}$

8.4 $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{2}\therefore A(\sum)=\sqrt{2}A(\Omega).$

8.5 $6+\frac{5}{2}\ln 5$

8.6 $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).$

8.7 Use teorema 8.4.

8.8 Use teorema 8.4.

8.9 1) $\frac{8}{3}\left(e^3-e^9\right);$

2) $22\log(2)-\frac{27}{2}\log(3);$

3) $4\pi\frac{\sqrt{2}}{3};$

4) $\dfrac{1}{8}\pi^2 a^2$;

5) $\frac{1}{720}$.

8.10 1) $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{5}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f\,dz\,dy\,dx$;

2) $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{0}^{y} f\,dz\,dy\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{0}^{1-x-y} f\,dz\,dy\,dx$;

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}\int_{c\sqrt{x^2+y^2}}^{c} f\,dz\,dy\,dx$;

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1-x^2-y^2} f\,dz\,dy\,dx$;

8.11 1) $\dfrac{37}{120}$;

2) 40;

3) 10;

4) $\frac{54}{5}$ sen (5^5);

5) $\frac{2^5\cdot 3\cdot 19}{7}$;

6) $\frac{5\cdot 3^5}{2}\,\pi$

8.12 1) $\frac{7}{15}$;

2) 9π;

8.13 1) 2^{10};

2) $\frac{16}{5}\,\pi$.

8.14 8π.

8.15 1) Bosquejo

2) 2.

3) 0.

8.16 1) Bosquejo

2) 1;

3) $\frac{2}{9}e^3 - \frac{17}{9}$.

8.17 $\frac{1}{10}$.

8.18 1) 6;

2) 6;

3) 6;

4) $2\log\frac{5}{2}$.

15.9 Ejercicios del capítulo 9

9.1 1) $x^2 + y^2 = 1$; $z = 4 - x^2 - y^2$.

2) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} dzdydx.$

3) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-r^2} rdzdrd\theta.$

4) $7\pi/2$.

9.2 1) $\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x^2+y^2} dzdydx.$

2) $2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\int_0^{r^2} rdzdrd\theta.$

3) $3\pi/2$

9.3 1) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta.$

2) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi d\rho d\phi d\theta.$

3) $\pi/3$.

9.4 1) $\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dzdrd\theta.$

2) 8π.

9.5 1) $\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\,dzdrd\theta.$

2) $8\pi.$

9.6 1) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx.$

2) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\int_0^{1-r\,\mathrm{sen}\,\theta} f(r,\theta,z)\,r\,dzdrd\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta\csc^2\theta}\int_0^{1-r\,\mathrm{sen}\,\theta}$
$f(r,\theta,z)\,r\,dzdrd\theta$

3) $5/12.$

9.7 1) $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^6 dydzdx.$

2) $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^6 r\,dydrd\theta.$

3) 24π

9.8 $\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\int_0^{1-r\cos\theta} f(r,\theta,y)r\,dydrd\theta.$

9.9 1) $37/120;$

2) $40;$

3) $\dfrac{5\cdot 3^5\pi}{2}$

4) 64π

5) $0;$

6) $6\cdot 5^4\pi$

9.10 $18\pi - 24.$

9.11 $\dfrac{16\pi}{5}.$

9.12 1) $\dfrac{2^{12}\pi}{5};$

2) $\dfrac{\pi}{24}\left(e^{7^4} - e^{16}\right);$

3) $\dfrac{81\pi}{4}(2-\sqrt{3}).$

9.13 $\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

9.14 $9\pi(2-\sqrt{2})$.

9.15 $2\pi\,(e-1)$.

9.16 $80\pi k$.

9.17 8π.

9.18 $\pi(2-\sqrt{2})$.

9.19 2π.

9.20 $\dfrac{4^3}{9}(3\pi-4)$.

15.10 Ejercicios del capítulo 10

10.1 C.

10.2 A.

10.3 D.

10.4 A

10.5 A.

10.6 1) $y = 6x$;

2) $x^2 + y^2 = 9$.

10.7 1) $\dfrac{1}{x+6y}\vec{i} + \dfrac{6}{x+6y}\vec{j}$.

2) $3x^2e^{-9y}\,\vec{i} - 9x^3e^{-9y}\,\vec{j}$.

3) $\left(\dfrac{11x^{10}}{2\sqrt{x^{11}+y^7+z^{11}}}, \dfrac{7y^6}{2\sqrt{x^{11}+y^7+z^{11}}}, \dfrac{11z^{10}}{2\sqrt{x^{11}+y^7+z^{11}}}\right)$.

10.8 1) $x(t) = x_0e^{2t},\ y(t) = y_0e^{-4t},\ \left(y = \dfrac{x_0^2y_0}{x^2}\right)$.

2) $x(t) = x_0 e^t,\ y(t) = y_0 e^{-t},\ \left(y = \dfrac{x_0 y_0}{x}\right)$;

10.9 $y = \dfrac{12}{x}$.

10.10 $y = \dfrac{x^2}{2} - 29$.

10.11 1) $\sqrt{10}(3 + 2\ln(2))$;

2) $\dfrac{5^4}{4}\sqrt{61}$;

3) $\frac{257}{12}\sqrt{257} - \frac{5\sqrt{5}}{12}$;

4) $\dfrac{\sqrt{146}\,(e^{72} - 1)}{144}$;

5) $\dfrac{2 \cdot 3^6}{5}$.

10.12 $\frac{15\sqrt{17}}{2}$.

10.13 πk.

10.14 1) 128;

2) $10\sqrt{13}\pi$.

10.15 $\dfrac{17}{6}$.

10.16 0.

10.17 $\dfrac{281}{6}$.

10.18 $\dfrac{522}{7}$.

10.19 1) $-\frac{59}{105}$;

2) 0;

3) $\dfrac{43}{210}$;

4) $\dfrac{37}{5} - \cos 8 - \operatorname{sen} 4$;

5) $12\,\pi + \frac{40}{3}$;

6) $1 - \sqrt{109}$;

7) $3 \cdot 2^{13} + e^{15} - \dfrac{1}{e}$;

10.20 1) $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} > 0$.

2) $\int_\delta \vec{F}\, d\vec{r} < 0$.

10.21 1) 303;

2) $14\pi^2$;

3) $\dfrac{1}{2}(\cos 4 - \cos 1 - 15)$;

4) $\dfrac{-8}{11}$

10.22 1) 9,

2) 9.

15.11 Ejercicios del capítulo 11

11.1 6.

11.2 2.

11.3 20.

11.4 6557.

11.5 1) Sí. $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + c$

2) No.

3) No.

4) Sí. $f(x, y) = xe^y + c$.

5) Sí. $f(x, y) = x^2 \cos y - y \operatorname{sen} x + c$.

6) Sí. $f(x, y) = xy + y^2$

11.6 El valor de la integral es 0, porque el campo vectorial mostrado es constante y por lo tanto es conservativo.

11.7 Sea $F = (P, Q)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ sin embargo no es conservativo. Su dominio $\mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ no es una región simplemente conexa.

11.8 El dominio de $\vec{F}$, $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ no es una región simplemente conexa porque al tomar por ejemplo la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y fijar un punto P sobre ella, ésta no se puede deformar al punto P de manera continua.

11.9 2π.

11.10 π.

11.11 $-\pi$.

11.12 1) Use resultados del ejercicio 11.9 o sumando apropiadamente las respuestas de 11.10 y 11.11.

2) No existe contradicción. Simplemente, no se puede aplicar el teorema de Green. Las derivadas parciales de $\vec{F}$ no están definidas en (0, 0). El teorema sí se puede aplicar si C es una curva cerrada simple que no contenga a (0, 0) en su interior o en su borde. En este caso la integral de línea es cero.

11.13 Sí.

11.14 -2π.

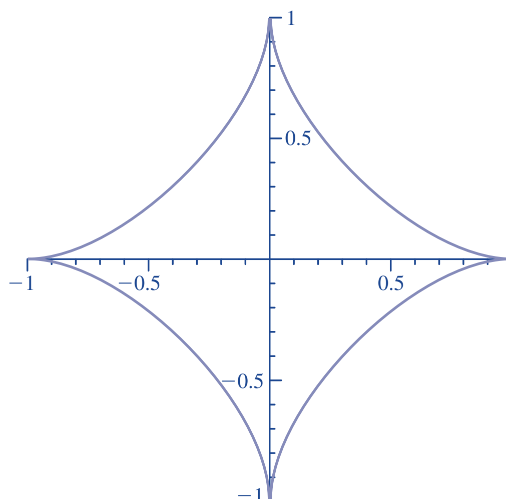
11.15 6.

11.16 Falsa.

11.17 $\frac{1}{2}\int_0^1 tdt - tdt - \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2 - 2t^2)dt = \dfrac{1}{6}$.

11.18 1) El dominio de $\vec{F}$ es $\mathbb{R}^2$, región simplemente conexa. Además para todo $\vec{F}(x, y) = (P(x), Q(y))$ se tiene que $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo.

2) Una parametrización de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$ es: $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$. Ésta es una curva cerrada.



3) La integral es cero porque C_1 es cerrada y $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo.

4) La integral es cero porque C_1 es cerrada y $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo.

11.19 1) 4200.

2) $126e^7 - 126$.

3) 2.

4) -192.

5) -1944π.

6) 0.

11.20 18.

11.21 243π.

11.22 1152π.

11.23 $\pi - \dfrac{16}{3} + \dfrac{18\sqrt{2}}{3}$.

11.24 1) $-2y\vec{i} - 7z\vec{j} - 3x\vec{k}$.

2) $-14\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$.

3) $-4e^x \cos y\, \vec{k}$

4) $\vec{0}$

5) $-(1, 1, 1)$

11.25 1) $-\dfrac{1}{2x^2 + 6y^2 + 8z^2}$.

2) n.

3) 0.

4) $(x - y)^2$

5) 0.

11.26 1) Sí. $f = 3xyz + c$.

2) Sí. $f = 5x^2 + 4y^2 + 2z^2 + c$.

3) Sí. $f = 6x^2y + 10y^2z + c$.

4) No.

5) Sí. $f = 2ye^{6xz} + c$.

11.27 1) $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)\,) \Rightarrow \nabla \times \nabla f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{xy} - f_{yx}) = \vec{0}$

2) $\nabla \times F = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times F = R_{xy} - Q_{xz} + P_{yz} - R_{yx} + Q_{zx} - P_{zy} = 0$

15.12 Ejercicios del capítulo 12

12.1 A.

12.2 A.

12.3 B.

12.4 B.

12.5 A.

12.6 A.

12.7 B.

12.8 B.

12.9 C.

12.10 B.

12.11 D.

12.12 B.

12.13 A.

12.14 1) $\frac{\pi}{6}(145\sqrt{145}-1)$; 2) $30\sqrt{13}+17\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{10\sqrt{17}}{17}\right)$; 3) $\pi\frac{76\sqrt{76}-8}{3}$

12.15 C.

12.16 B.

12.17 $\vec{n} = 2u^2\cos v\vec{i} + 2u^2\,\mathrm{sen}\,v\vec{j} + u\vec{k}$.

12.18 1) $252\sqrt{26}$; 2) $32\sqrt{3}$; 3) $\frac{3^3\cdot 5\cdot 13}{4}\sqrt{13}-\frac{505}{4}\sqrt{101}$; 4) $\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$; 5) $80\sqrt{2}\pi$; 6) $2^2\cdot 3^5\pi$; 7) $\frac{5^3\cdot 47}{2}\pi$; 8) 0.

12.19 $-\frac{45}{2}\pi$.

12.20 B.

12.21 $A(\sum) = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

12.22 $\frac{\pi}{32}(18\sqrt{5}-\mathrm{senh}^{-1}2)$.

12.23 1) $120\sqrt{3}\pi$; 2) $-5^7\pi$; 3) 120.

12.24 (0; 0; 4, 5).

12.25 $(1060)\cdot(162)\pi$.

12.26 450π

15.13 Ejercicios del capítulo 13

13.1 $\nabla\times\vec{F} = (-4, 6, -3)$, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -27\pi$.

13.2 $\nabla\times\vec{F} = -(y, z, x)$, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$.

13.3 $\nabla \times \vec{F} = -(1, 1, 1)$, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3}{2}$.

13.4 1) V, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

2) F, $\nabla \cdot \vec{F} \neq \vec{0}$.

3) V, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

4) V, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

5) V, $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

13.5 1) $\frac{12\pi}{5}$.

2) 24.

3) 0.

4) $\frac{27\pi}{2}$.

13.6 $\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{20}$.

13.7 C.

13.8 A.

13.9 C.

13.10 B. Las superficies S y M tienen la misma orientación hacia arriba y como frontera la misma curva compatible con estas orientaciones. Construimos un sólido E que tiene como frontera la unión de estas dos superficies $\Sigma = S \cup M$. Indicamos con M^- la superficie M con orientación hacia abajo. Aplicando el teorema de Gauss y el teorema del capítulo 11 obtenemos:

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})\ dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{M^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{M^-} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{M} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

13.11 D.

13.12
1) -4π;
2) 0;
3) 0;
4) $-480 - 2684/3 - 1484 = 8576/3$;
5) 0;
6) -64π;
7) 2500π;
8) π;
9) 0. Aplicando el teorema de Gauss y el teorema del capítulo 11.
10) 0;
11) 0;

13.13 20.

13.14
1) $\frac{4528\pi}{5}$;
2) $\frac{4064}{105}$;
3) $\frac{64\pi}{5}$;
4) 81π;
5) 1275;
6) 1944π;
7) 200π;
8) 3456π;
9) 0;
10) $\frac{2916\pi}{5}$;
11) $\frac{729\pi}{2}$.

13.15 16π.

15.14 Ejemplo de primer parcial

14.1 1) Sea $F(x, y, z) = yz - \ln(x + z)$ y $P(3, 0, -2)$,

$$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{1}{x+z}}{y - \frac{1}{x+z}} = \frac{1}{(x+z)y - 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(P) = -1.$$

Rta. $\boxed{-1}$

2)

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos t, -2 \operatorname{sen} t, \sqrt{3}\cos t), \quad \text{en } t = 0, \text{ tenemos}$$

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(0) = (1, 0, \sqrt{3}),$$

$$\vec{\alpha}(s) = (0, 2, 0) + s(1, 0, \sqrt{3}).$$

Rta. $\boxed{\vec{\alpha}(s) = (s, 2, s\sqrt{3})}$

3) Son 10 casillas para llenar. Por cada casilla correcta 0,5

Función	CN: I, II, III, IV o V	Gráf.: A), B), C), D), o E),
a)	IV	E
b)	III	B
c)	V	D
d)	I	C
e)	II	A

14.2 1) $\boxed{\text{F}}$ Es una elipse.

2) $\boxed{\text{V}}$ $s = -t$

3) [F] El gradiente en cada punto de una curva de nivel es perpendicular a ella.

4) [V] $\nabla f(2, 2, 2) = (2x, z, y)|(1, 2, 2) = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$. $\vec{u}$ tiene la misma dirección y sentido que el gradiente en este punto.

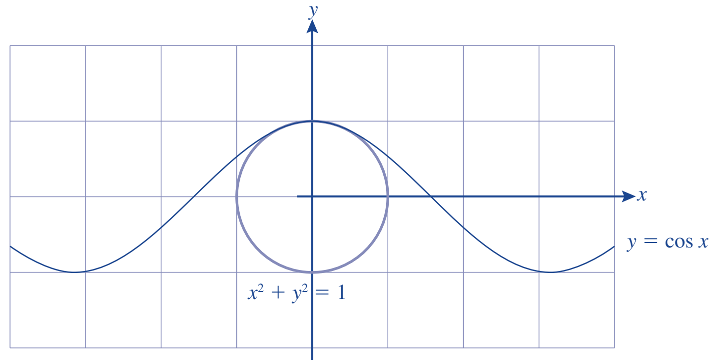
14.3

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 1) \Rightarrow \vec{n}(P) = \nabla f(1, 2, 20) = (2, 4, 1)$$

$$\therefore 2(x-1) + 4(y-2) + z - 20 = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 30$$

Rta. $\boxed{2x + 4y + z = 30}$

14.4 1) Como $f(P) = g(P) = c = 0$ en ambos casos es el nivel cero de las dos funciones.



2) El ángulo θ de intersección entre $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ en $P(0, 1)$ es igual al ángulo entre sus gradientes.

$$\vec{u} = \nabla f(P) = (2x, 2y)|_P = (0, 2)$$

$$\vec{v} = \nabla g(P) = (\text{sen } x, 1)|_P = (0, 1))$$

$$\therefore \theta = 0$$

Rta. $\boxed{\theta = 0}$

15.15 Ejemplo de segundo parcial

14.5 Los apareamientos son:

Integral de volumen de E	Gráf. de E: I), II), III), o IV)
(a)	III
(b)	II
(c)	I
(d)	IV

14.6 1) **Usaremos simetrías**. En primer lugar, el sólido E es simétrico respecto al eje z, es decir al reemplazar x por $-x$, y por $-y$ en la ecuación que lo define, ésta no cambia. En segundo lugar, dado que la densidad $\delta(x, y, z)$ es constante, las funciones del integrando de los numeradores quedan, $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$, y ellas satisfacen $f_1(x, y, z) = -f_1(-x, -y, z)$, $f_2(x, y, z) = -f_2(-x, -y, z)$. Por lo tanto al integral sobre el sólido E, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_E z\delta(x, y, z)\, dV}{\iiint\limits_E \delta(x, y, z) dV} = \frac{\iiint\limits_E z\, dV}{\iiint\limits_E dV} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta}{\frac{4}{6}\pi(2)^3} = \frac{4\pi}{\frac{4}{6}\pi(2)^3} = \frac{3}{4}.$$

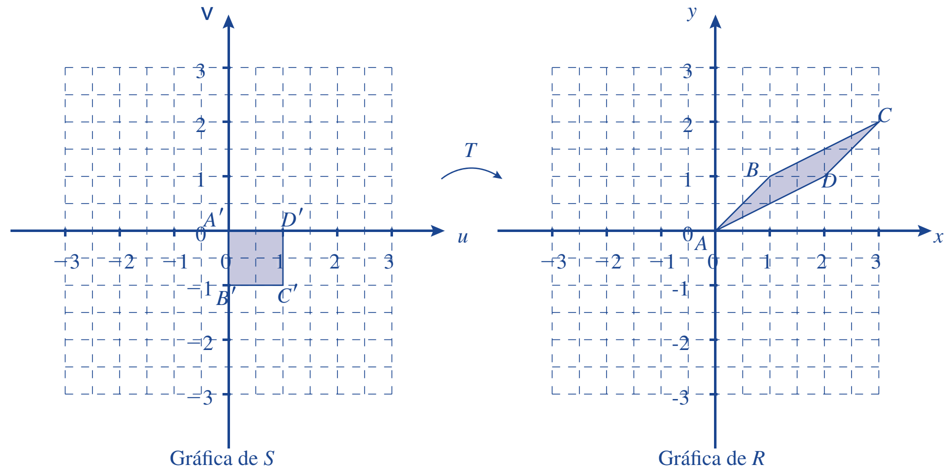
Entonces el centro de masa es

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3}{4}\right)}\,.$$

14.7 Sea T la transformación del plano en el plano $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) = T(u, v) = (2u - v, u - v)$. Sea $\square ABCD$ el paralelogramo cuyos vértices están en $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 2)$, y $D = (2, 1)$.

1) La transformación T es lineal y por lo tanto tiene matriz asociada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Su matriz inversa es,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

El paralelogramo $S = \square A'B'C'D'$ es la preimagen de $R = \square ABCD$, mediante T, cuyos vértices están en $A' = (0, 0)$, $B' = (0, -1)$, $C' = (1, -1)$ y $D' = (1, 0)$.

2) El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

3) Usando la fórmula de cambio de variables tenemos:

$$\iint_R (x - y)\ dydx = \int_0^1 \int_{-1}^0 u|J|\, dvdu = \frac{1}{2}.$$

14.8 1) Extremos libres (test de la segunda derivada)

Puntos críticos:

$$(x, y) = (1, 2)$$

Este punto lo tenemos en cuenta porque está en el disco $x^2 + y^2 \leq 45$. Como el discriminante es

$$\Delta(1\,, 2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

entonces en $(1, 2)$ la función tiene un mínimo local y su valor es cero, $f(1, 2) = 0$.

2) Extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange)
Sea $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ y $x^2 + y^2 - 45 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2(y-2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 45 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 1, \\ y(1-\lambda) = 2, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, tenemos una contradicción ($1 = 0$ y $2 = 0$). Por lo tanto $\lambda \neq 1$ y tenemos

$$x = \frac{1}{1-\lambda}, \quad y = \frac{2}{1-\lambda}.$$

Reemplazando en la restricción tenemos

$$\frac{1}{1-\lambda} = \pm\sqrt{\frac{45}{1^2 + 2^2}} = \pm 3.$$

Lo cual implica

$$(x, y) = \pm(3, 6).$$

Finalmente tenemos $f(1, 2) = 0$, $f(3, 6) = 20$, $f(-3, -6) = 80$.

Valor máximo de f es 80 y lo obtiene en $(-3, -6)$

Valor mínimo de f es 0 y lo obtiene en $(1, 2)$

15.16 Ejemplo de examen final

14.9 1) V $\vec{r}(t) = t^5(1, 1, 1)$, por lo tanto $\vec{r}\,'(t) = 5t^4(1, 1, 1)$ y esto indica que $\vec{r}$ representa una recta.

2) V El dominio por investigar es un rectángulo D de área $A(D) = 8$ y las curvas de nivel $f = c$ de la función integrando son circunferencias concéntricas con centro en el origen y radio $R = -\sqrt{-\ln(c)}$, donde $0 < c \leq 1$. Por lo tanto, cuando $c \longrightarrow 1$, $R \longrightarrow 0$ y cuando $c \longrightarrow 0$, $R \longrightarrow \infty$. Por esta razón el máximo es e^{-2} y lo alcanza en $(1, 1)$ y el mínimo es e^{-34} y lo alcanza en $(5, 3)$.

3) $\boxed{\text{F}}$ $\nabla \cdot \vec{F} = \cos x + \cos y - 2\cos z \neq 0$ en general.

4) $\boxed{\text{V}}$ La gráfica de f es un paraboloide abierto hacia arriba con vértice en (1, 2), donde alcanza el mínimo que tiene valor de −5.

5) $\boxed{\text{F}}$ Una condición que debe cumplir es que el punto P debe estar en ambas superficies: la esfera y el plano.

14.10 1) $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = z \end{cases} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + c.$$

3)

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(b)).$$

4)

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + c \right) \Big|_{(2,0,0)}^{(1,2,3)} = \boxed{5}$$

14.11 1)

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

2)

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} \, dV.$$

3)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (3\rho^2) \quad \rho^2 \operatorname{sen}\phi \quad d\rho d\phi d\theta.$$

4)

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi\right)\left(\int_0^{1} 3\rho^4 d\rho\right) = \boxed{\frac{12\pi}{5}}$$

14.12 1)

$$m = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1} (\rho^2 + 1)\,(\rho^2 \operatorname{sen}\phi)\, d\rho d\phi d\theta$$

2)

$$m = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi d\phi\right)\left(\int_0^{1} (\rho^4 + \rho^2) d\rho\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{8\pi \;\; 2-\sqrt{2}}{60} = \frac{2\pi \;\; 2-\sqrt{2}}{15}$$

14.13 1)

$$\begin{cases} f_x = 8x - y, \\ f_y = 8y - x \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Puntos críticos $P_0 = (0, 0)$

2)

$$\Delta\,(0, 0) = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 63$$

En $P_0 = (0, 0)$ la función alcanza un mínimo local y su valor es $f(0, 0) = 0$.

3) Multiplicadores de Lagrange con $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g, \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - y = 2\lambda x & (1), \\ 8y - x = 2\lambda y & (2), \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 & (3). \end{cases}$$

Si $y = 0$, entonces (2) implica $x = 0$, pero $x = 0$, $y = 0$ no satisface (3).

Si $x = 0$, entonces (1) implica $y = 0$, pero $x = 0$, $y = 0$ no satisface (3).

Si $\lambda = 0$, entonces (1) y (2) implica $x = 0$, y $= 0$, pero $x = 0$, $y = 0$ no satisface (3).

Si $x = 8y$, entonces (2) implica $y = 0$ o $\lambda = 0$. En cualquiera de estos casos obtenemos $x = 0$, $y = 0$, pero $x = 0$, $y = 0$ no satisface (3).

Sea $x \neq 8y$, $\lambda \neq 0$, $y \neq 0$. Dividiendo (1) por (2), obtenemos:

$$\frac{8x - y}{8y - x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow f(1, 1) = 7$$

$$P_2 = (1, -1) \Rightarrow f(1, -1) = 9$$

$$P_3 = (-1, 1) \Rightarrow f(-1, 1) = 0$$

$$P_4 = (-1, -1) \Rightarrow f(-1, -1) = 7$$

Por lo tanto en el disco $D = \{(x, y) \mid x_2 + y_2 \leq 2g\}$

El máximo de f es 9 y lo obtiene en $(1, -1)$ y $(-1, 1)$

El mínimo de f es 0 y lo obtiene en $(0, 0)$.

15.17 Ejemplo de tarea I

14.14 Vector director $(3, -2, 1) \times (1, 2, 3) = -8(1, 1, -1)$. Por lo tanto $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

Para $z = 0$ el sistema $3x - 2y = 7$ y $x + 2y = -3$ tiene solución $(1, -2)$, por lo tanto $P(1, -2, 0)$.

Una parametrización es: $\vec{r}(t) = (1, -2, 0) + t(1, 1, -1)$.

14.15 Las dos rectas no se intersectan. Podemos suponer que $\vec{r}_1$ está en un plano α_1 y que $\vec{r}_2$ está en otro plano α_2 tales que α_1 es paralelo a α_2.

Un punto P_1 de $\vec{r}_1$ es $P_1 = (0, 0, 0)$

Un punto P_2 de $\vec{r}_2$ es $P_2 = (0, 1, 0)$

Un vector director de $\vec{r}_1$ es $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$

Un vector director de $\vec{r}_2$ es $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$

Un vector normal de α_1 es $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3, -2, -1)$

La distancia entre las rectas es la proyección escalar del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre $\vec{n}$,

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \quad|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

14.16 1) $u_{tt} = -4\cos(2t - x) - 4\,\text{sen}(2t - x)$,
$u_{xx} = -\cos(2t - x) - \text{sen}(2t - x)$,
$-3u = -3\cos(2t - x) - 3\,\text{sen}(2t - x)$.

2) Como u es constante, elevando al cuadrado, la expresión $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$ también será constante. Por lo tanto $\alpha = 2t - x$ es constante. Es decir las curvas de nivel son rectas $2t - x = c$ en el plano $'tx'$.

3) Si $u = 1$ entonces del punto anterior $2t - x = 0$ y una parametrización es $\vec{r}(t) = t(1, 2)$.

14.17 Sea $F(x, y, z) = e^x(\cos y + 1) - 2z + 2 = 0$. Entonces $\nabla f(x, y, z) = (e^x(\cos y + 1), -e^x \operatorname{sen} y, -2) \Rightarrow \nabla F(0, 0, 2) = (2, 0, -2)$.

Por lo tanto la ecuación del plano tangente y la recta normal en P respectivamente son,

$$2x - 2(z - 2) = 0 \Rightarrow x - z + 2 = 0$$

$$\vec{r}(t) = (0, 0, 2) + t\,(2, 0, -2) \Rightarrow \vec{r}(t) = (t, 0, 2 - t)$$

Sea $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}e^x(\cos y + 1) \Rightarrow \nabla f(x, y) = \frac{1}{2}e^x(\cos y + 1, -\operatorname{sen} y)$$

$$\nabla f(0, 0) = (1,0) \Rightarrow D_{\vec{u}}f(0, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\cdot(1, 0) = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = 0 \Rightarrow \vec{u} = (1, 0).$$

14.18

$$L = \int_0^{\pi/2} \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16}dt = 5\int_0^{\pi/2} dt \;\therefore\; L = \frac{5\pi}{2}.$$

14.19 Sea $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - z^3 + 3$ y $P(1, 1, 2)$, entonces $\dfrac{\partial F}{\partial z}(P) = -3z^2|_P = -12 \neq 0$, por lo tanto la ecuación dada define una función implícita $z = f(x, y)$ (por teorema de la función implícita).

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(P) = -\frac{8x}{-3z^2}(P) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2/3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{-3z^2} = \frac{2y}{3z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{8x}{3z^2}\right)(P) = \left[\frac{8x}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right](P)$$

$$= \left[\left(\frac{8x}{3}\right)\left(\frac{-2}{z^3}\right)\frac{\partial z}{\partial y}\right](1, 1, 2)\boxed{= -\frac{1}{9}}.$$

14.20 La curva de nivel c es la circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = \frac{100}{c} - 1$.

Por lo tanto los valores de c posibles son los pertenecientes a la imagen de T que es $\{z \in \mathbb{R} \mid 0 < z \leq 100\}$. A medida que aumenta el valor de c el radio disminuye, cuando disminuye el valor de c, aumenta su radio. El valor máximo de T es 100 y lo alcanza para $c = 1$. El punto más caliente es (0, 0). Para un punto $Q(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (dominio de T) la dirección en que la temperatura crece lo más rápido posible es la dirección del gradiente $\nabla T(Q) = -200\left(\frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$. Se podría también decir que la dirección pedida es $\vec{v}(Q) = -(x, y)$.

14.21 Parametrización $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right)$. Por lo tanto $\|\vec{r}'(t)\| = 1 + \frac{t^2}{2}$.

$$\int_0^6 \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 42.$$

14.22 Sea $F(x, y, z) = e^{x-y} - z$. La superficie dada es el nivel cero de F. Por lo tanto,

$$\nabla F(P) = (1, -1, -1) = \vec{n}$$

$$(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0 \text{ es la ecuación del plano tangente en } P,$$

$$Q = (0, 0, 1) \text{ es el punto buscado.}$$

14.23

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + f'(u)y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)x$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

14.24 El punto es $(3, 1, -2)$; $\frac{\partial z}{\partial z}(3, 1) = -\frac{12}{25}$.

14.25 $3x + 6y + 2z = 23$.

14.26 $t_0 = 1$, $x = 1 + 4s$, $y = 2s$, $z = e^2(1 + 2s)$.

14.27 $5\sqrt{13}\pi$.

14.28 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sen} y + x^2 e^y z}{x^2 e^y + \operatorname{sen} z}$.

14.29 $-\frac{1}{\sqrt{5}e}$.

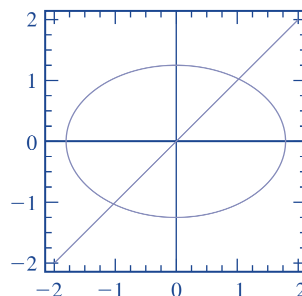
14.30 $y + e^z - 2 = 0.$

14.31

a)	V	D
b)	III	B
c)	I	E
d)	II	C
e)	IV	A

14.32

1)



2) $\theta = \arccos(1/\sqrt{10}).$

14.33 1) $\left(-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

2) $\left(-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

3) $D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u.$

4) Las curvas de nivel.

5) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(p_1 + hu_1, p_2 + hu_2) - f(p_1, p_2)}{h}.$

15.18 Ejemplo de tarea 2

14.34 Mínimo $f(-4, 1) = -11$

14.35 Sea $f(x, \theta) = (w - 2x + x\cos\theta)(x \operatorname{sen}\theta)$ y aplicar método de extremos libres (test de la segunda derivada).

1) $x = w/3 \;\; \theta = \pi/3 \; A_{\text{máx}} = \dfrac{\sqrt{3}w^2}{12} \approx 0{,}14434w^2$

2) Sí, porque el área del medio círculo $\dfrac{w^2}{2\pi} \approx 0{,}1596w^2 > 0{,}14434w^2$.

14.36 Si $A = 10^4$ cm^2, $p = 100$ y $q = 150$ pesos, entonces el costo total es $\sqrt{Aq/p}$.

14.37 $a = h = 18$, $l = 36$, $V = 11\,664$.

14.38 $\text{mín} = 1/2$, $\text{máx} = 2 + \sqrt{2}$.

14.39 $e^4 - 1$.

14.40 $8/3$.

14.41 $= \pi(e - 1)$.

14.42 0.

14.43 $\pi(1 - e^{-16})$.

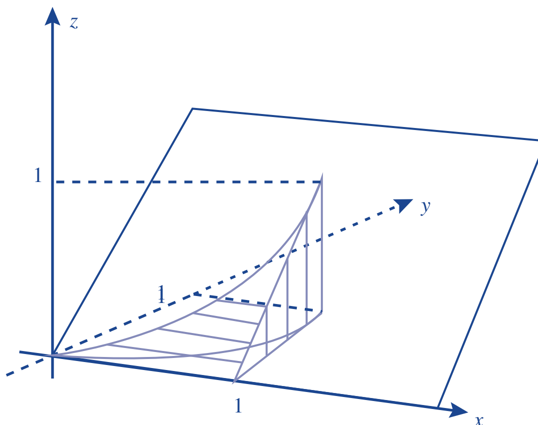
14.44 $(32/9)a^3$.

14.45 $(3/10)a^3$.

14.46 $8/3$.

14.47 $\sqrt{2}$.

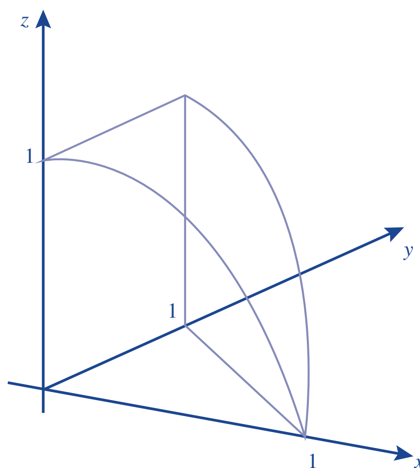
14.48 1)



$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,dzdydx$$
$$= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^y f(x,y,z)\,dzdxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^z \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)\,dxdzdy$$
$$= \int_0^1 \int_z^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_z^{x^2} f(x,y,z)\,dydxdz$$
$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_z^{x^2} f(x,y,z)\,dydzdx.$$

14.49 $E = \{(x,y,z) \mid 1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2 \geq 0\}$.

14.50 1)



2)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} xyz^2\,dzdydx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} xyz^2\,dzdxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} xyz^2\,dydzdx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} xyz^2\,dydxdz$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-z}} xyz^2\,dxdydz + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-z}}^1 \int_0^{1-y} xyz^2\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} \int_0^{1-y} xyz^2\,dxdzdy + \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} xyz^2\,dxdzdy. \tag{15.1}$$

3) $61/7560$.

14.51 $L^3/8$.

14.52 π.

14.53 2π.

14.54 $(1, 2, 1/2)$.

14.55 1) $A = 2$

2) $V = \dfrac{2}{3}$

14.56 $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14.57 $\pi\sqrt{2}\ln(2)$.

14.58 $\dfrac{4\pi}{3}$.

15.19 Ejemplo de tarea 3 (final)

14.59 1) $\frac{\partial T}{\partial x}(3, 3) \approx 5.2$, $\frac{\partial T}{\partial y}(3, 3) \approx 7.75$;

2) $T(x, y) \approx 15{,}6 + 5{,}2(x - 3) + 7{,}75(y - 3)$.

3) 22.075.

14.60 $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}5; 0{,}5) \approx -1.875$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}5; 0{,}5) \approx 0{,}458$.

14.61 1) Positivo; 2) Cero; 3) Positivo; 4) Cero; 5) No; 6) Sí.

14.62 1) $\neq \vec{0}$, 2) $= \vec{0}$, 3) $= \vec{0}$, 4) $= \vec{0}$, 5) $= 0$, 6) $= 0$, 7) $\neq 0$, 8) $= 0$

14.63 18π (**ayuda:** use fórmula de Green).

14.64 $2(\pi - \frac{1}{\sqrt{5}}(\text{arcsenh}(1/2) + \text{arcsenh}(2))$.

14.65 6/5 (**ayuda:** use fórmula de Green).

14.66 3 (**ayuda:** use fórmula de Gauss).

14.67 π.

14.68 $e + 1$.

14.69 7/15.

14.70 $f(x, y, z) = x^2ye^z + \frac{1}{3}z^3$.

14.71 1) V.

2) Es verdad si $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son conservativos. En general

$$\nabla \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G}$$

14.72 $1/14 + \sqrt{2}/6$.

14.73 1/2.

14.74 1) Negativa; 2) Positiva; 3) Positiva; 4) Positiva; 5) Positiva.

14.75 3.

14.76 0, $\vec{F}$ es conservativo y C es cerrada.

14.77 4π (teorema de Gauss).

14.78 ¡Cuidado! Aquí no se puede usar el teorema de Gauss directamente, pues la superficie no es cerrada, pero se puede tapar con un disco, se aplica teorema de Gauss a la nueva superficie con tapa y se resta el flujo sobre la tapa. La primera integral es igual a 4π y la segunda (flujo sobre la tapa) por cálculos directos es igual a cero. Sobre la tapa debe tomar el vector normal unitario $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

14.79 1) y 3) son cálculos directos (ningún problema). 2) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. 4) Por el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea es el potencial evaluado en el infinito y sobre la superficie de la tierra. En el infinito es cero el potencial y en la superficie es simplemente el radio de la tierra R. Así que la respuesta es $W = -\dfrac{1}{R}$. El menos significa que se "viaja"en sentido contrario al campo.

14.80 Geométricamente. La gráfica de f es un paraboloide (de revolución) abierto hacia arriba con vértice en (1, 1). Las curvas de nivel son circunferencias concéntricas con centro en (1, 1). Por lo tanto el mínimo está en (1, 1) y es cero y el máximo está en los vértices más lejanos del punto (1, 1) en los puntos (0, 0) y (0, 2) y este valor máximo de f es igual a 2.

14.81

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

14.82 1) Escalar, 2) Vector (cero), 3) Sin sentido, 4) Vector, 5) Vector.

14.83 A.

14.84 C.

14.85 C.

14.86 A.

14.87 C.

14.88 4. Multiplique en ambos lados por r, use coordenadas polares y complete cuadrados.

14.89 1) $2x - 3y - 6z + 4 = 0$

2) $\frac{1}{2}\left[33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}\right]$

3) $-\frac{160}{3}$

14.90 0.

14.91 25π.

Bibliografía

[1] J. Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6a. Ed., Brooks-Cole/Cengage Learning (2008).

[2] G. B. Thomas, R. L. Finney, M. D. Weir, F. R. Giordano, *Thomas' Calculus*, Addison-Wesley, 10a. Ed. (2000).

[3] T. M. Apostol, *Calculus*, 2a. Ed., Reverté, S.A. (1988).

[4] J. Marsden, A. Tromba, *Cálculo vectorial*, 4a. Ed., Addison-Wesley (1998).

[5] B. P. Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático* (Edición en Español), Paraninfo, 11a. Ed. (1993).

Índice de materias

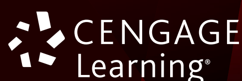
T

V

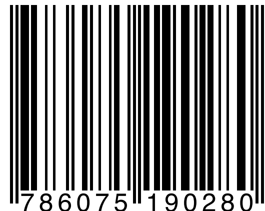
Este libro está dirigido a quienes desean entender la práctica del cálculo diferencial e integral en varias variables, en su aplicación técnica. Se presenta un formato de texto propositivo, que busca hacer del cálculo algo práctico, es decir, que el lector identifique por sí mismo los principios básicos y lógicos que le dan fundamento al cálculo diferencial e integral en dos y más variables.

Entre sus características relevantes pueden mencionarse las siguientes:

- Es un texto guía para el curso de Cálculo Vectorial para carreras de ingeniería.
- Sirve como texto para aquellos estudiantes que deseen estudiar de forma individual este curso.
- Cuenta con los temas suficientes para el curso, explicados de manera corta y clara.
- Los ejercicios y problemas, que son su punto central, fueron escogidos cuidadosamente.
- El texto está adaptado al proceso pedagógico de enseñanza-aprendizaje del curso.







ISBN-13: 978-607-519-028-0
ISBN-10: 607-519-028-7